Equazioni Differenziali

Nome: Esame scritto del 18 Marzo

Tempo a disposizione: 2.30 ore

Esercizio 1 (8 punti) Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$ tale che per qualche $k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{1 + |x|^k} < +\infty.$$

Provare che u è un polinomio di grado al più k.

Esercizio 2 (9 punti) Siano $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 < |x| < 2\}$, $n \geq 2$, una corona sferica e $a, b \in \mathbb{R}$ due costanti. Si consideri il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = a & \text{su } |x| = 1 \\ u = b & \text{su } |x| = 2. \end{cases} \tag{$*$}$$

(i) Verificare che la soluzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ del problema $(*)$ è radiale, ovvero $u(x) = u(y)$ se $|x| = |y|$.

(ii) Calcolare la soluzione del problema $(*)$.

(iii) Sia ora $n = 2$. Supponiamo che esista $w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ soluzione del Problema

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{su } |x| = 1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = -a & \text{su } |x| = 1 \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} = b/2 & \text{su } |x| = 2, \end{cases} \tag{$**$}$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega$. Dimostrare che deve essere $a = b$ e calcolare quindi la soluzione w di $(**)$.

Esercizio 3 (8 punti) Dare la definizione di funzione subarmonica e illustrare le proprietà più importanti delle funzioni subarmoniche (max 1 pagina).

Soluzione dell'Esercizio 1. Per ipotesi esiste una costante $C_1 > 0$ tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|u(x)| \leq C_1(1 + |x|^k).$$

Siano ora B_r e B_R palle centrate in 0 con raggi $0 < r < R$. Dato un multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, per le stime di Cauchy abbiamo

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B_r} |\partial^\alpha u(x)| &\leq \Big(\frac{n|\alpha|}{R-r}\Big)^{|\alpha|} \sup_{x \in B_R} |u(x)| \\
&\leq C_1 \Big(\frac{n|\alpha|}{R-r}\Big)^{|\alpha|} \sup_{x \in B_R} (1 + |x|^k) \qquad (\heartsuit) \\
&= C_1 \Big(\frac{n|\alpha|}{R-r}\Big)^{|\alpha|} (1 + R^k).
\end{aligned}$$

Per $|\alpha| > k$ si ha

$$\lim_{R \to +\infty} \frac{(1+R)^k}{(R-r)^{|\alpha|}} = 0,$$

e quindi facendo il limite per $R \to +\infty$ in $(\heartsuit)$ si deduce che

$$\sup_{x \in B_r} |\partial^\alpha u(x)| = 0$$

per ogni $r > 0$ e per ogni multi-indice tale che $|\alpha| > k$. Questo implica che u è un polinomio di grado al più k.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) (3 punti) Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione ortogonale e consideriamo la funzione $v = u \circ T$. Siccome $\Delta v = \Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$, la funzione v è armonica in Ω. Inoltre $v = a$ su $|x| = 1$ e $v = b$ su $|x| = 2$. Dunque, v è soluzione del Problema di Dirichlet e per l'unicità della soluzione si deduce che $u = v = u \circ T$.

(ii) (4 punti) Poichè la soluzione è radiale, si ha $u(x) = \varphi(r)$ con $r = |x|$ dove $\varphi \in C^2(1,2) \cap C([1,2])$ è soluzione del problema

$$\begin{cases} \varphi''(r) + \frac{n-1}{r}\varphi'(r) = 0, & r \in (1,2), \\ \varphi(1) = a \\ \varphi(2) = b. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'equazione differenziale è

$$\varphi(r) = \begin{cases} c \log r + d, & \text{per } n = 2 \\ c r^{2-n} + d, & \text{per } n \geq 3. \end{cases}$$

Le costanti $c, d \in \mathbb{R}$ si determinano con le condizioni al bordo. Tornando ad u si trova la soluzione

$$u(x) = \begin{cases} \dfrac{b-a}{\log 2} \log|x| + a, & n = 2 \\ \dfrac{1}{2^{2-n}-1} \left\{ (b-a)|x|^{2-n} + 2^{2-n}a - b \right\}, & n \geq 3. \end{cases}$$

(iii) (2 punti) Sia w una soluzione del Problema $(**)$. Allora, con il Teorema della divergenza si trova

$$0 = \int_\Omega \Delta w(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\mathcal{H}^1 = \int_{|x|=1} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\mathcal{H}^1 + \int_{|x|=2} \frac{\partial w}{\partial \nu} d\mathcal{H}^1 = 2\pi(b-a),$$

e quindi $a = b$. Un modo per provare questo fatto che produce anche la soluzione è il seguente. Si considera la funzione $u(x) = \langle \nabla w(x), x \rangle$. Questa funzione è armonica (Cfr. Appunti del corso a p.69). Inoltre, si ha

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad u(x) = -\frac{\partial w(x)}{\partial \nu} = a,$$

e analogamente $u(x) = b$ per $|x| = 2$. Dunque u risolve il Problema di Dirichlet $(*)$ e quindi

$$u(x) = \frac{b-a}{\log 2} \log|x| + a.$$

Fissato $v \in \mathbb{R}^n$ con $|v| = 1$, definiamo $\psi(r) = w(rv)$, una sezione radiale di w. Allora $r\psi'(r) = u(rv)$ e quindi ψ risolve l'equazione ordinaria

$$r\psi'(r) = \frac{b-a}{\log 2} \log r + a, \quad r \in (1, 2),$$

con il dato iniziale $\psi(1) = 0$. Integrando l'equazione si trova

$$\psi(r) = \frac{b-a}{2\log 2} \log^2 r + a \log r,$$

e in particolare ψ non dipende da v. Quindi w deve essere della forma

$$w(x) = \frac{b-a}{2\log 2} \log^2|x| + a\log|x|.$$

La funzione $\log^2|x|$ non è armonica: questo si prova con un conto oppure ricordandosi che l'unica funzione armonica radiale nel piano è $\log|x|$, a meno di una costante moltiplicativa e di una addittiva. Quindi affinchè w sia soluzione del Problema $(**)$ deve essere $b - a = 0$. La funzione $w(x) = a\log|x|$ è soluzione ed è l'unica.