Equazioni Differenziali

Nome: Esame scritto del 1 Aprile

Tempo a disposizione: 2.30 ore

Esercizio 1 (8 punti) Sia u il potenziale capacitario di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto limitato di classe C^1. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx$$

per ogni funzione $v \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ tale che $v = 1$ su $\partial\Omega$ e $\lim_{|x| \to +\infty} v(x) = 0$.

Esercizio 2 (10 punti) Sia u una funzione armonica in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

(i) (2 punti) Provare che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$ si ha

$$u(x)^2 \leq \fint_{B_r(x)} u(y)^2 dy,$$

dove $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| < r\}$.

(ii) (5 punti) Supponiamo che

$$\liminf_{r \to +\infty} \fint_{B_r(0)} u(y)^2 dy < +\infty.$$

Provare che u è costante.

(iii) (3 punti) Supponiamo che

$$\liminf_{r \to +\infty} \frac{1}{r^2} \fint_{B_r(0)} u(y)^2 dy < +\infty.$$

Provare che u è affine.

Esercizio 3 (8 punti) Illustrare i teoremi più importanti sulla convergenza di successioni di funzioni armoniche (max 1 pagina).

Soluzione dell'Esercizio 1. Ponendo $w = v - u$, si ha

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla v|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla(v-u) + \nabla u|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla w|^2 dx + 2\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla u|^2 dx \\ &\geq 2\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\nabla u|^2 dx.\end{aligned}$$

Se proviamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx = 0, \qquad ((*))$$

segue l'affermazione nel testo dell'esercizio.

La funzione $w = v - u \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ verifica

$$w(x) = 0 \quad \text{per } x \in \partial\Omega, \qquad \lim_{|x|\to+\infty} w(x) = 0.$$

Si ricordi che u è infinitesima per $|x| \to +\infty$, Teorema 13.2.3 a p.66 degli Appunti.

Dato $R > 0$ sia $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\} \setminus \bar{\Omega}$. Dal fatto che $\nabla v \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ (altrimenti non c'è nulla da provare) ed anche $\nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$, segue che $\langle \nabla w, \nabla u\rangle \in L^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$. Per il Teorema della convergenza dominata vale allora

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{\Omega_R} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx.$$

Poiché $\Delta u = 0$ si ha $\langle \nabla w, \nabla u\rangle = \operatorname{div}(w\nabla u)$ e dunque per il Teorema della divergenza

$$\int_{\Omega_R} \langle \nabla w, \nabla u\rangle dx = \int_{\Omega_R} \operatorname{div}(w\nabla u) dx = \int_{\partial\Omega_R} w\langle \nabla u, \nu\rangle d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{|x|=R} w\langle \nabla u, \nu\rangle d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove ν è la normale esterna a $\partial\Omega_R$. Nell'ultima uguaglianza abbiamo usato il fatto che $w = 0$ su $\partial\Omega$.

Per il Teorema 13.2.3 a p.66 degli Appunti, esistono $R_1 > 0$ e $C > 0$ tali che

$$|\nabla u(x) \leq C|x|^{1-n} \quad \text{per } |x| \geq R_1.$$

Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $R_2 > 0$ tale che $|w(x)| \leq \varepsilon$ per $|x| \geq R_2$. Dunque se $R \geq \max\{R_1, R_2\}$ allora

$$\Big|\int_{|x|=R} w\langle \nabla u, \nu\rangle d\mathcal{H}^{n-1}\Big| \leq \int_{|x|=R} |w||\nabla u| d\mathcal{H}^{n-1} \leq \varepsilon C R^{1-n}\mathcal{H}^{n-1}(\{|x| = R\}) = \varepsilon C n\omega_n.$$

Questo prova la $(*)$.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) Siccome la funzione u è armonica e $f(t) = t^2$ è convessa, dalla proprietà di media e dalla disuguaglianza di Jensen segue che

$$u(x)^2 = f(u(x)) = f\Big(\fint_{B_r(x)} u(y)dy\Big) \le \fint_{B_r(x)} f(u(y))dx = \fint_{B_r(x)} u(y)^2 dy,$$

per $x \in \mathbb{R}^n$ ed $r > 0$. Alternativamente, per la disuguaglianza di Hölder si ha

$$\Big(\int_{B_r(x)} u(y)dy\Big)^2 \le \omega_n r^n \int_{B_r(x)} u(y)^2 dy,$$

e si arriva alla stessa conclusione. Alternativamente ancora, si calcola $\Delta u^2 = 2|\nabla u|^2 \ge 0$ e quindi u^2 è subarmonica e dunque ha la proprietà della sottomedia.

(ii) Esiste una successione di raggi $(r_j)_{j\in\mathbb{N}}$ tali che $r_j \to +\infty$ per $j \to +\infty$ e

$$\lim_{j\to+\infty} \fint_{B_{r_j}} u(y)^2 dy = C_1 < +\infty.$$

D'altra parte, in virtù di (ii), per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $s > 0$

$$u(x)^2 \le \fint_{B_s(x)} u(y)^2 dy \le \frac{1}{\omega_n s^n} \int_{B_{s+|x|}(0)} u(y)^2 dy = \Big(\frac{s+|x|}{s}\Big)^n \fint_{B_{s+|x|}(0)} u(y)^2 dy.$$

Scegliamo $s_j = r_j - |x|$, per j sufficientemente grande. In questo modo

$$u(x)^2 \le \lim_{j\to+\infty} \Big(\frac{r_j}{r_j - |x|}\Big)^n \fint_{B_{r_j}(0)} u(y)^2 dy = C_1.$$

Dunque u è una funzione limitata. Dal Teorema di Liouville segue che u è costante.

(iii) Le derivate parziali $\partial_1 u, ..., \partial_n u$ sono funzioni armoniche. Se proviamo che $|\nabla u|$ è una funzione limitata, dal Teorema di Liouville segue che ∇u è un vettore di funzioni costanti, e quindi u è una funzione affine.

Con notazione vettoriale, per le formule di media e per il Teorema della divergenza

$$\nabla u(x) = \fint_{B_s(x)} \nabla u(y)dy = \frac{1}{\omega_n s^n} \int_{\partial B_s(x)} u(y)\nu(y) d\mathcal{H}^{n-1},$$

dove $\nu(y) = (y-x)/|y-x|$. Riordinando e integrando in $s \in (0, r)$ si trova

$$\nabla u(x) \int_0^r s^n ds = \frac{1}{\omega_n} \int_0^r \int_{\partial B_s(x)} u(y) \frac{y-x}{|y-x|} d\mathcal{H}^{n-1} ds = \frac{1}{\omega_n} \int_{B_r(x)} u(y) \frac{y-x}{|y-x|} dy,$$

ovvero

$$\nabla u(x) = \frac{n+1}{r} \fint_{B_r(x)} u(y) \frac{y-x}{|y-x|} dy,$$

da cui, ad esempio con una disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$|\nabla u(x)|^2 \le \frac{(n+1)^2}{r^2} \fint_{B_r(x)} u(y)^2 dy.$$

Ora si procede come nel punto (ii) e si prova che esiste una costante $C_2 < +\infty$ tale che $|\nabla u(x)|^2 \le C_2$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.