Equazioni Differenziali

Nome: Esame scritto del 17 Giugno 2008

Tempo a disposizione: 2.30 ore

Esercizio 1 (8 punti) Sia u una funzione armonica non negativa nella palla $B = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$. Stimare $u(x)$ per $|x| = 1/2$ in rapporto a $u(0)$.

Esercizio 2 (9 punti) Sia $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che converga l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{s} \int_0^s \sigma f(\sigma)\, d\sigma\, ds = \lim_{r \to +\infty} \int_0^r \frac{1}{s} \int_0^s \sigma f(\sigma)\, d\sigma\, ds.$$

Dato $R > 0$ sia $B_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\}$.

(i) (5 punti) Calcolare la soluzione $u_R \in C^2(\bar{B}_R)$ del Problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u_R(x) = f(|x|) & x \in B_R \\ u_R(x) = 0 & x \in \partial B_R. \end{cases}$$

(ii) (3 punti) Verificare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x) = \lim_{R \to +\infty} u_R(x), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

è di classe $C^2(\mathbb{R}^2)$.

(iii) (1 punto) Provare che $\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0$ e $\Delta u(x) = f(|x|)$ per $x \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 3 (8 punti) Continuità fino al bordo della soluzione generalizzata di Perron-Wiener del Problema di Dirichlet: illustrare alcuni criteri di regolarità.

Soluzione dell'Esercizio 2. (i) Cerchiamo una soluzione radiale $u_R(x) = v(|x|)$. Se u_R è radiale e di classe $C^1(B_R)$, allora $\nabla u_R(0) = 0$ e quindi $v'(0) = 0$. La funzione $v \in C^2([0, R])$ deve verificare

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{1}{r}v' = f(r) & r \in [0, R) \\ v'(0) = 0 \\ v(R) = 0. \end{cases}$$

Moltiplicando l'equazione differenziale per r si trova $(rv')' = rf(r)$ e integrando si ottiene

$$v' = \frac{1}{r}\int_0^r sf(s)\,ds + \frac{C}{r},$$

dove la costanate $C \in \mathbb{R}$ si determina tramite la condizione $v'(0) = 0$, ottenendo $C = 0$. Integrando nuovamente si ottiene allora

$$v(r) = \int_0^r \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds + D,$$

dove la costante $D \in \mathbb{R}$ si determina tramite la condizione al bordo $v(R) = 0$, trovando

$$v(r) = -\int_r^R \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds, \qquad 0 \leq r \leq R.$$

La soluzione è dunque la funzione

$$u_R(x) = -\int_{|x|}^R \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds.$$

(ii) La funzione u limite delle funzioni u_R è

$$u(x) = \lim_{R\to+\infty} -\int_{|x|}^R \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds = -\int_{|x|}^{+\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds.$$

L'integrale converge in senso improprio per ipotesi. Proviamo che la funzione

$$w(r) = -\int_r^{+\infty} \frac{1}{s}\int_0^s \sigma f(\sigma)\,d\sigma\,ds, \quad r \geq 0,$$

ha le seguenti proprietà: $w \in C^2([0, +\infty)$ e $w'(0) = 0$. Da questo segue che $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Infatti, un breve conto mostra che per $r > 0$

$$w'(r) = \frac{1}{r}\int_0^r \sigma f(\sigma)\,d\sigma, \quad \text{e inoltre} \quad w'(0) = \lim_{r\to 0} w'(r) = \lim_{r\to 0} rf(r) = 0,$$

come si vede con il Teorema di Hôpital.

Infine, la derivata seconda di w è

$$w''(r) = -\frac{1}{r^2}\int_0^r \sigma f(\sigma)\,d\sigma + f(r), \quad \text{e inoltre} \quad w''(0) = \frac{f(0)}{2},$$

come si vede di nuovo con Hôpital.

(iii) Usando i conti del punto (ii) si ottiene $w'' + w'/r = f(r)$, ovvero $\Delta u(x) = f(|x|)$ con $x \in \mathbb{R}^2$. Infine, si ha $\lim_{r\to+\infty} w(r) = 0$, di nuovo in virtù della convergenza dell'integrale improprio.