Equazioni Differenziali Foglio 3

Nome: Consegna entro 20 Febbraio

Esercizio 1 Sia $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una trasformazione ortogonale rispetto al prodotto scalare standard. Verificare che $\Delta(u \circ T) = (\Delta u) \circ T$ per una qualsiasi $u \in C^2$.

Esercizio 2 Sia $\beta \geq 0$ un parametro e sia $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$. Si consideri il problema di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u = |x|^{2\beta} & \text{in } B \\ u = 0 & \text{su } \partial B. \end{cases}$$

i) Verificare che se il Problema di Poisson precedente ha una soluzione $u \in C^2(B) \cap C(\bar{B})$ allora essa è unica e verifica $u(x) = u(y)$ se $|x| = |y|$.

ii) Calcolare la soluzione del Problema.

iii) Sia ora $-1 < \beta < 0$. Producendo un esempio, mostrare che l'equazione differenziale in forma debole

$$-\int_B \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_B \varphi \, |x|^{2\beta} \, dx, \quad \text{per ogni } \varphi \in C_0^1(B),$$

ha una soluzione $u \in H^1(B) \cap C(\bar{B})$ che verifica il dato al bordo $u = 0$ su ∂B.

Esercizio 3 Sia u una funzione subarmonica in $\mathbb{R}^n$ e sia f una funzione convessa e crescente in $\mathbb{R}$. Dimostrare che $v = f \circ u$ è subarmonica in $\mathbb{R}^n$.

i) Provare il caso $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ed $f \in C^2(\mathbb{R})$ (con tecniche differenziali).

ii) Provare il caso generale[1].

Informazione. Pagina internet in costruzione: http://www.math.unipd.it/~monti/

---

[1] Ricordiamo la disuguaglianza di Jensen. Sia $(X, \mathcal{A}, \mu)$ uno spazio di misura con $\mu(X) = 1$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione convessa. Allora

$$f\Big(\int_X u(x) \, d\mu(x)\Big) \leq \int_X f(u(x)) \, d\mu(x),$$

per ogni funzione $u : X \to \mathbb{R}$ integrabile con $f \circ u$ integrabile.