Equazioni Differenziali

Foglio 7

Nome: Consegna 18 Marzo

Esercizio 1 Sia $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \setminus (-1, 0]$ il disco aperto meno un segmento e sia $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Verificare che il Problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ u = \varphi & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha soluzione (unica).

Esercizio 2 (Nucleo di Poisson del disco) Sia $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ il disco unitario e sia $\varphi : \partial D \to \mathbb{R}$ la funzione

$$\varphi(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ c_n z^n + \bar{c}_n \bar{z}^n \right\}, \quad |z| = 1,$$

con serie convergente uniformemente, dove $c_0 \in \mathbb{R}$ e $c_n \in \mathbb{C}$ per $n \geq 1$.

1) Verificare che

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \varphi(\zeta) \bar{\zeta}^n d\mathcal{H}^1.$$

2) Dedurre che la soluzione del Problema di Dirichlet $\Delta u = 0$ in D e $u = \varphi$ su ∂D ha la forma

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (z\bar{\zeta})^n + (\bar{z}\zeta)^n \right\} \varphi(\zeta) d\mathcal{H}^1.$$

3) Calcolare il nucleo $\{\ldots\}$ nell'integrale precedente.

Esercizio 3 Sia u il potenziale capacitario di $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, aperto limitato di classe C^1. Verificare che

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} |\nabla v|^2 dx$$

per ogni funzione $v \in C^1(\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ tale che $v = 1$ su $\partial\Omega$ e $\lim_{|x| \to +\infty} v(x) = 0$.