Matematica A

Foglio 11

Teoremi di Hôpital, Lagrange e Taylor

19 Novembre 2007

Esercizio 1. Calcolare i seguenti limiti

$$\text{i) } \lim_{x\to 1} \frac{1-2x+x^2}{x\sin^2(\pi x)}; \quad \text{ii) } \lim_{x\to 0} \frac{1+\log(1+x)-x-\cos x-\frac{1}{3}x^3}{x^4}.$$

Esercizio 2. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ un numero reale fissato. Usando il Teorema di Hôpital, verificare che per $x \to 0$ si ha

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+o(x^2).$$

Esercizio 3. i) Calcolare lo sviluppo di Taylor in $x_0 = 0$, fino al terzo ordine e con resto di Peano della funzione $f(x) = \mathrm{arctg}(x)$.
ii) Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)\mathrm{arctg}(x)-x\sin(x)}{\mathrm{arctg}(x)-1-\log(1+x)+\cos(x)}.$$

Esercizio 4. Verificare per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^n} = 0.$$

Suggerimento: Trasformare la frazione nella forma $x^{-n}/e^{1/x}$.

Esercizio 5. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile tale che $|f'(x)| \leq 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $f(0) = 0$. Verificare che $|f(x)| \leq |x|$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Suggerimento: Teorema di Lagrange.

Esercizio 6. Sia $p \geq 1$ un numero fissato. Determinare il più piccolo numero $q > 0$ (in funzione di p) tale che la disuguaglianza

$$x \leq \frac{1}{p}x^p + q$$

sia verificata per ogni $x \geq 0$.

Esercizio 7. Studiare la convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\Big(1-\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n\Big).$$