Matematica A — Foglio 13

Integrali — 23 Novembre 2007

Esercizio 1. (Funzioni integrabili).
1) Stabilire se la funzione $f(x) = (1-x)^{-1/2}$ è Riemann-integrabile nell'intervallo $(0,1)$.
2) Stabilire se la funzione $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ così definita

$$g(x) = \begin{cases} \sin(x) + x - 1 & \text{se } x \in [-1,0) \\ \sin(x) + x + 1 & \text{se } x \in [0,1], \end{cases}$$

è Riemann-integrabile nell'intervallo $(-1,1)$.
Risposte: 1) No. 2) Si.

Esercizio 2. (Integrali razionali) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$1)\ \int \frac{1}{9x^2+12x+5}dx, \quad 2)\ \int \frac{1}{2x^2+3x-2}dx, \quad 3)\ \int_2^3 \frac{x^3+1}{x(x-1)^2}dx,$$

$$4)\ \int_3^4 \frac{x-3}{x(x-1)(x-2)}dx, \quad 5)\ \int_0^{1/2} \frac{x^4}{1-x^4}dx, \quad 6)\ \int_1^2 \frac{x^2-1}{x^2(x^2+1)}dx.$$

Risposte: 3) $2 + \log 3$; 4) $\frac{7}{2}\log 3 - \frac{11}{2}\log 2$.

Esercizio 3. (Per sostituzione) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$1)\ \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx, \quad 2)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x - 3\sin x + 2}dx, \quad 3)\ \int_{\log 2}^{\log 3} \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}\,dx,$$

$$4)\ \int \sqrt{1+x^2}dx, \quad 5)\ \int_0^1 \frac{1+\sqrt{x}}{1+x+\sqrt{x}}dx, \quad 6)\ \int \sqrt{\frac{1+e^x}{1-e^x}}dx, \quad 7)\ \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{1-x^2}dx.$$

Risposte: 3) $\frac{1}{2}\log\frac{8}{3}$; 5) $2 - \frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$.

Esercizio 4. (Sostituzioni parametriche) Calcolare i seguenti integrali definiti e indefiniti

$$1)\ \int \frac{\cos x + 1}{\cos x - 1}dx, \quad 2)\ \int_0^{\pi/4} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1-\sin x}}dx, \quad 3)\ \int \frac{1}{\sqrt{1+\sin x}}dx.$$

Risposte: 1) $x + \frac{2}{\tan(x/2)} + C$.

Esercizio 5. (Per parti) Calcolare gli integrali definiti e indefiniti

$$1)\ \int_0^2 |x(e^x-2)|\,dx, \quad 2)\ \int_1^e \log^2 x\,dx, \quad 3)\ \int_0^{\pi/6} \frac{x}{\cos^2(2x)}dx, \quad 4)\ \int e^{\beta x}\sin(\alpha x)dx.$$

Risposte: 1) $e^2 - 1 + 2\log^2 2 - 4\log 2$; 3) $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi + \frac{1}{4}\log 2$.