Matematica A

Foglio 14

Integrali impropri — 26 Novembre 2007

Esercizio 1. Calcolare i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(x+1)^2} dx; \quad 2)\ \int_0^{+\infty} x^{-2} e^{-\frac{1}{x}}\, dx; \quad 3)\ \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \sin(\alpha x)\, dx, \quad \beta > 0,\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Risposte: 1) 0. L'integrale su $(0,1)$ è l'opposto di quello su $(1,+\infty)$. 2) 1. 3) $\frac{\alpha}{\beta^2+\alpha^2}$. Una primitiva si trova integrando per parti due volte.

Esercizio 2. i) Determinare tutti i parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che il seguente integrale improprio converga

$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x^\beta}{x^\alpha(1+x^2)} dx.$$

ii) Rappresentare i parametri ammissibili nel piano cartesiano $\alpha\beta$.

Risposte: ii) Parallelogramma centrato nell'origine.

Esercizio 3. Stabilire se convergono i seguenti integrali impropri (non si chiede di calcolarli)

$$1)\ \int_0^{+\infty} \sin^2 x\, dx; \quad 2)\ \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-\sin(x)}}\, dx; \quad 3)\ \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx; \quad 4)\ \int_0^{+\infty} x \sin(x^4)\, dx.$$

Risposte: 1) diverge a $+\infty$; 2) diverge a $+\infty$; 3) converge; 4) converge: sostituzione $y = x^4$, poi integrazione per parti, e infine convergenza assoluta (esercizio difficile).

Esercizio 4. Stabilire se convergono assolutamente i seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx; \quad 2)\ \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\sqrt{x}} \cos x\, dx; \quad 3)\ \int_1^{+\infty} \Big(\frac{1}{x} - \mathrm{tg}\frac{1}{x}\Big) \sin x\, dx.$$

Risposte: 1) Converge assolutamente (Criterio del confronto). 2) Converge assolutamente (Criterio del contronto). Usare la disuguaglianza $x^2 e^{-\sqrt{x}} \le x^{-2}$ per $x \ge M$. 3) Converge assolutamente (Criterio del confronto asintotico). Ricordare lo sviluppo $\mathrm{tg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$ per $x \to 0$.

Esercizio 5. Calcolare gli $\alpha > 0$ tali che converga ciascuno dei seguenti integrali impropri

$$1)\ \int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{\mathrm{tg} x - x}\, dx; \quad 2)\ \int_0^1 \frac{\sin(x^\alpha)}{\log(1+x)}\, dx;$$

$$3)\ \int_0^{+\infty} \frac{\pi/2 - \mathrm{arctg}(\sqrt{x})}{x^\alpha}\, dx; \quad 4)\ \int_2^{+\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\log^\alpha x} dx.$$

Risposte: 1) $\alpha > 1$; 2) $\alpha > 0$; 3) $1/2 < \alpha < 1$. Al fine di studiare la convergenza a $+\infty$ con il Criterio del confronto asintotico, determinare preliminarmente $\beta \in \mathbb{R}$ tale che il limite

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta (\pi/2 - \mathrm{arctg}(\sqrt{x})) = L \neq 0$$

esista finito e diverso da 0. 4) $\alpha > 1$ (Confronto asintotico con $\frac{1}{x \log^\alpha x}$).