Matematica A — Foglio 15

Equazioni differenziali del primo ordine — 29 Novembre 2007

Esercizio 1. Trovare la soluzione generale delle equazioni differenziali lineari del primo ordine

$$\text{i) } y' = \frac{y\cos x}{1+\sin x} + \sin x; \quad \text{ii) } y' = \frac{3}{x}y + x^2 + 1; \quad \text{iii) } y' + \frac{y}{2e^x - 1} = x^2.$$

Risposte: ii) $y = x^3 \log x - \frac{1}{2}x + Cx^3$.

Esercizio 2. Trovare la soluzione generale delle seguenti equazioni differenziali a variabili separabili

$$\text{i) } yy' = e^{x-y}\sin x; \qquad \text{ii) } xy' + y^2 = 3y - 2.$$

Risposte: i) $(y-1)e^y = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C$. Non è possibile scrivere la soluzione in forma esplicita.

Esercizio 3. Si consideri l'equazione differenziale

$$(1-\cos y)y' = x\sin x \sin y.$$

i) Calcolare le soluzioni costanti.

ii) Calcolare in forma implicita la soluzione generale dell'equazione.

iii) Calcolare in forma implicita la soluzione del Problema di Cauchy con dato $y(0) = \frac{5}{2}\pi$.

iv) Scrivere in forma esplicita la soluzione del punto iii).

Risposte: i) $y = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. ii) $\cos y = 2e^{x\cos x - \sin x - C} - 1$ con $C \in \mathbb{R}$. iii) $\cos y = e^{x\cos x - \sin x} - 1$. iv) $y = 2\pi + \arccos\left(e^{x\cos x - \sin x} - 1\right)$.

Esercizio 4. Risolvere i seguenti Problemi di Cauchy

$$\text{i) } \begin{cases} y' = \dfrac{y}{1+e^x} + e^{-x} \\ y(0) = 0. \end{cases} \qquad \text{ii) } \begin{cases} y' = y(y-1)(x+1) \\ y(0) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \qquad \text{iii) } \begin{cases} y' = y^2\log(x+3) \\ y(-2) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Risposte: ii) $y(x) = (1 + e^{\frac{1}{2}x^2 + x})^{-1}$. iii) $y = (x - (x+3)\log(x+3))^{-1}$.

Esercizio 5. Risolvere il seguente Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \sin(x + y + 3) \\ y(0) = -3. \end{cases}$$

Risposta. Con la sostituzione $z = y + x + 3$ ridursi ad una equazione a variabili separabili nella funzione incognita z. Soluzione: $y = -2\arctan\left(\frac{x}{x-2}\right) - x - 3$.

Esercizio 6. Calcolare la soluzione del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}, \quad x > 1 \\ y(\sqrt{2}) = \sqrt{2\log 2}. \end{cases}$$

Risposta. Con la sostituzione $y = xz$ ridursi ad una equazione a variabili separabili nella funzione incognita z.