

# Matematica A

**Esercizio 1.** Determinare il parametro  $\lambda \in \mathbb{C}$  in modo tale che  $z_0 = 1 + 2i$  sia radice dell'equazione

$$z^6 - 2z^5 + \lambda z^4 + z^2 - 2z + \lambda = 0.$$

Per tale  $\lambda$ , calcolare in forma algebrica tutte le altre radici dell'equazione.

**Esercizio 2.** Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \cos \frac{1}{\sqrt{n}} + \sin \frac{1}{3n} \right)^{n(n+1)}.$$

**Esercizio 3.** Al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$  calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \log(1 + \sin x) - \frac{1}{2}x^2}{\log(1 + x) - xe^{\alpha x}}.$$

**Esercizio 4.** Sia  $\alpha \in \mathbb{R}$  un parametro e si consideri la funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{|x|^{4\alpha}}{1+x^2}\right) & x \neq 0, \\ \pi/2 & x = 0. \end{cases}$$

- i) Determinare gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che la funzione sia continua su  $\mathbb{R}$ ;
- ii) Determinare gli  $\alpha \in \mathbb{R}$  tali che la funzione sia derivabile con continuità su  $\mathbb{R}$  e per tali  $\alpha$  calcolare  $f'(0)$ .

**Esercizio 5.** 1) Al variare di  $\alpha > 0$  si studi la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{(1 + \sin x) \log^\alpha(1 + \sin x)} dx.$$

2) Calcolare l'integrale improprio nei casi in cui converge.

**Esercizio 6.** Si consideri il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y-1}{x(x^2+1)}, & x > 0 \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

- 1) Calcolare la soluzione  $y(x)$  del Problema di Cauchy;
- 2) Calcolare il limite  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x)$ .

**Esercizio 7.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{\pi + \arcsin(x)}{4 \arcsin(x) - \pi}.$$

- i) Determinare il dominio  $A = D(f)$  della funzione  $f$  e calcolare i limiti significativi;
- ii) Studiare continuità e derivabilità di  $f$ ;
- iii) Calcolare  $f'(x)$  ed eventuali limiti di  $f'$  agli estremi;
- iv) Determinare gli intervalli di monotonia di  $f$ ;
- v) Provare che  $f$  è iniettiva e calcolare l'insieme immagine  $f(A)$ ;
- vi) Calcolare la funzione inversa  $f^{-1}$  specificandone il dominio;
- vii) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$  e di  $f^{-1}$ .

**Esercizio 8.** Si consideri la funzione

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

- i) Determinare il dominio  $A = D(f)$  della funzione  $f$ , eventuali simmetrie, calcolare i limiti significativi ed eventuali asintoti;
- ii) Studiare continuità e derivabilità di  $f$ ;
- iii) Calcolare  $f'(x)$  ed eventuali limiti significativi di  $f'$ . Eventuali punti di angolo e/o cuspidi;
- iv) Studiare gli intervalli di monotonia;
- v) Disegnare un grafico qualitativo di  $f$ .
- vi) [Facoltativo] Si chiede di stabilire se è vero che

$$\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) = 2\arctg(|x|).$$