Matematica A

Foglio 2

Induzione, estremo superiore

5 Ottobre 2007

Esercizio 1. Verificare mediante induzione le identità

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 2. Mediante induzione verificare che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Esercizio 3. Siano dati i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

$$A = \left\{ \frac{1+2n^2}{1+n^2} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ \frac{xy}{x^2+y^2} : x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 \right\},$$

$$C = \left\{ x^2 - 2x \sin x : x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \right\}, \quad D = \left\{ \frac{n \log(1/n)}{n+1} : n \in \mathbb{N},\ n \neq 0 \right\}.$$

1) Determinare $\inf A$ e $\sup A$. Dire se esistono $\min A$ e $\max A$.

2) Determinare $\inf B$ e verificare che $\sup B = 1/2$. Dire se esistono $\min B$ e $\max B$.

3) Verificare che $\sup C = +\infty$.

4) Verificare che $\inf D = -\infty$. ($\log = \ln$ è il logaritmo naturale.)

Esercizio 4. (Formula di Stiefel) Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Verificare l'identità

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Esercizio 5. 1) Dimostrare che $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. 2) Dimostrare che $\log_2 10 \notin \mathbb{Q}$.

Esercizio 6. Ad un torneo di pallavolo partecipano $n \in \mathbb{N}$ squadre, $n \geq 3$. Ogni squadra gioca una volta con ogni altra squadra. Ci sono tre squadre A, B, C tali che A sconfigge B, B sconfigge C e C sconfigge A. Dimostrare che alla fine del torneo ci sono almeno due squadre a pari punti. Suggerimento: induzione con base induttiva per $n = 3$.