

Esercizio 1. Usando la definizione di limite verificare che

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x^4} = -\infty, \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+1} = 2.$$

Esercizio 2. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le forme indeterminate:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{(\pi-x)^2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\alpha x) - \cos(\beta x)}{x^2}, \text{ con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \quad 5) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}}{x - x_0}, \text{ dove } x_0 > 0;$$

Risposte: 1) -1 ; 2) $3/2$; 3) $1/8$; 4) $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$; 5) $\frac{1}{3}x_0^{-2/3}$.

Esercizio 3. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le forme indeterminate del tipo $[\frac{\infty}{\infty}]$:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(2x) \log x + x e^x}{e^x \cosh(x) \log(x+1) + x^2 \sinh x}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 3^x + x^4 4^x}{3^x \log(1+3^x) + (x^2 2^x + 2)^2}.$$

Risposte: 1) 1 ; 2) 1 .

Esercizio 4. Calcolare i seguenti limiti ‘risolvendo’ le forme indeterminate del tipo $[1^\infty]$:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x^3 + 1}{x + 2}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}.$$

Risposte: 1) $\frac{1}{e^2}$.

Esercizio 5. Calcolare i seguenti limiti

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan \left(\log \left(\frac{x^2}{x+1} \right) \right); \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sinh(\log(x^2 + 1))}{x^\alpha}, \text{ con } \alpha > 0;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}{1-x}; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha x^2} + x^3 \sin \frac{1}{x}}{x^2}, \text{ con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

Risposte: 1) $\pi/2$; 2) 1 se $\alpha = 2$; 3) $+\infty$; 4) α .

Esercizio 6. Stabilire esistenza o non esistenza dei seguenti limiti, esaminando separatamente $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow 0^-$

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{(x^2 + x^3)^{3/2}}.$$

Risposte: 1) non esiste; 2) non esiste.