Pen.
~~[illegible]~~
A. MONTANARO

MATEMATICA A

Area dell'Ingegneria dell'Informazione

Prova scritta - 5 Settembre 2008 (a.a. 786°)

TEMA 4

Esercizio 1

Calcolare in forma implicita la soluzione del Problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x\cos(2+x^2)}{\sinh^3 y} \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Esercizio 2

Si consideri la funzione

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log|4-2x|}}:$$

i) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti ed eventuali asintoti.

ii) Stabilire dove f è continua e dove è derivabile.

iii) Calcolare f' e i limiti di f' (attacchi).

iv) Studiare la monotonia di f ed eventuali punti di estremo relativo ed assoluto.

v) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio di f''.

Esercizio 3

Risolvere l'equazione nell'incognita complessa $z \in \mathbb{C}$

$$(z-2)^3 = \frac{1-i}{1+i}.$$

Tempo a disposizione: due ore e 30 minuti.

Il candidato, a meno che non si ritiri, deve consegnare questo foglio assieme al foglio intestato.

Viene corretto solo ciò che è scritto sul foglio intestato.

È vietato usare libri, appunti, telefoni e calcolatrici di qualsiasi tipo.

È vietato uscire dall'aula prima che sia trascorsa un'ora dall'inizio della prova.

Ogni affermazione deve essere adeguatamente giustificata.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA

5 Settembre 2008

TEMA 4

Esercizio 1 - Tema 4

$$\begin{cases} y' = \dfrac{x \cos(2+x^2)}{\sinh^3 y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Variabili separabili:

$$y' \sinh^3 y = x \cos(2+x^2)$$

Integrale a sinistra:

$$\int \sinh^3 y \, dy = \int \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^3 dy = \frac{1}{8} \int \left(e^{3y} - 3e^{y} + 3e^{-y} - e^{-3y} \right) dy$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{e^{3y}}{3} - 3e^{y} - 3e^{-y} + \frac{1}{3} e^{-3y} \right] + C$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{e^{3y} + e^{-3y}}{3} - 3 \left(e^{y} + e^{-y} \right) \right] + C$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{2}{3} \cosh(3y) - 6 \cosh(y) \right] + C$$

Integrale a destra $2+x^2 = z$, $dz = 2x\,dx$

$$\int x \cos(2+x^2)\,dx = \frac{1}{2} \int \cos(z)\,dz = \frac{1}{2} \sin z + K$$

$$= \frac{1}{2} \sin(2+x^2) + K$$

Via Trieste, 63 - I-35121 Padova - Tel. 049.827.1200 - Fax 049.827.1444-049.827.1499 - P.I. 00742430283 - C.F. 80006480281

Amministrazione Tel. 049.827.1401 - Fax 049.827.1499 e-mail: amministrazione@math.unipd.it
Direzione Tel. 049.827.1411 - Fax 049.827.1499 e-mail: dipmath@math.unipd.it
Segreteria Didattica Tel. 049.827.1345 - Fax 049.827.1444 e-mail: didattica@math.unipd.it

Soluzione in forma implicita: (generale)

$$\frac{1}{12}\cosh 3y - \frac{3}{4}\cosh y = \frac{1}{2}\sin(2+x^2) + D$$
$D \in \mathbb{R}$.

Determino D con $y(0) = 1$

$$\frac{1}{12}\cosh 3 - \frac{3}{4}\cosh 1 = \frac{1}{2}\sin 2 + D$$

e trovo D.

$x \to 0^+ \qquad x^2/2 + o(x^2)$

$$f(x) = e^{\frac{2}{\log|4-2x|}}$$

Esercizio 2

Dominio

$|4-2x| \neq 0 \iff x \neq 2$ ~~1° caso: $4-2x>0$ ovvero $x<2$~~ ~~$4-2x$~~

$\log|4-2x| \neq 0 \iff |4-2x| \neq 1$

$\iff 4-2x \neq 1 \quad , \quad x \neq 3/2$

$4-2x \neq -1 \quad , \quad x \neq 5/2$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{3/2, 2, 5/2\}$$

Segno

Segno $\quad f(x) > 0 \quad$ per $x \in D(f)$

Limiti

$$\lim_{x \to \pm\infty} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = 1$$

$$\lim_{x \to 2} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \to 3/2^-} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

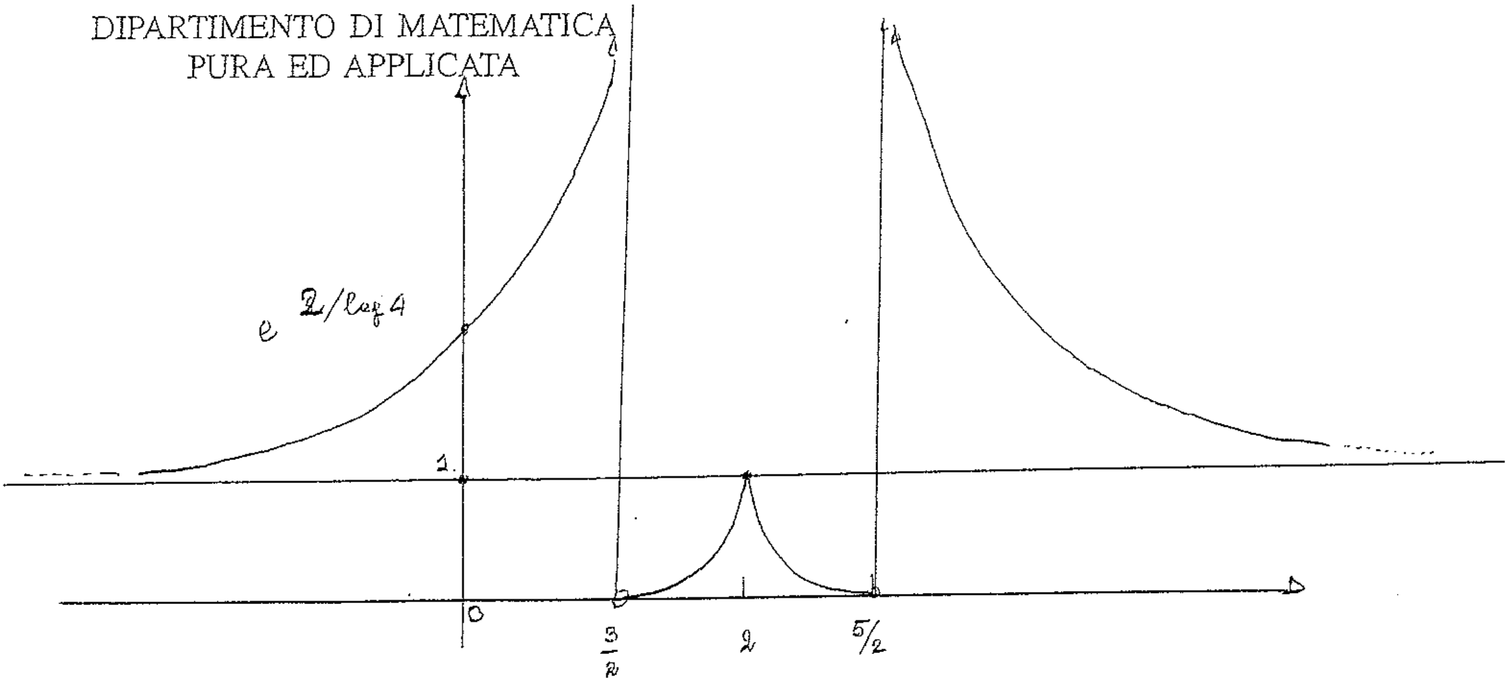
$$\lim_{x \to 3/2^+} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = e^{\frac{2}{0^-}} = 0$$

$$\lim_{x \to 5/2^-} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = e^{\frac{2}{0^-}} = 0$$

$$\lim_{x \to 5/2^+} e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} = e^{\frac{2}{0^+}} = +\infty$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
PURA ED APPLICATA



Asintoti: $y = 1$ orizzontale

$x = 3/2$ verticale SX

$x = 5/2$ verticale DX

Continuità e Derivabilità: f continua e deriv. in $D(f)$, Prolungamento continuo in $x = 2$

Derivata
$$f'(x) = e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} \cdot 2 \, \frac{1}{\log^2|4-2x|} \left(-\frac{1}{4-2x} \cdot (-2) \right)$$
$$= 4\, e^{\frac{2}{\log|4-2x|}} \cdot \frac{1}{\log^2|4-2x|} \cdot \frac{1}{4-2x}$$

Inoltre

$$\lim_{x \to 2^\pm} \log^2|4-2x| \cdot (4-2x) = 0^\mp$$

Quindi

$$\lim_{x \to 2^\pm} f'(x) = \frac{4}{0^\mp} = \mp\infty$$

Poi

$$\lim_{x \to 3/2^+} f'(x) = 4 \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{2}{t}}}{t^2} = 4 \lim_{z \to -\infty} z^2 e^{2z} = 0$$

Via Trieste, 63 - I-35121 Padova - Tel. 049.827.1200 - Fax 049.827.1444-049.827.1499 - P.I. 00742430283 - C.F. 80006480281

Amministrazione Tel. 049.827.1401 - Fax 049.827.1499 e-mail: amministrazione@math.unipd.it
Direzione Tel. 049.827.1411 - Fax 049.827.1499 e-mail: dipmath@math.unipd.it
Segreteria Didattica Tel. 049.827.1347 - Fax 049.827.1444 e-mail: didattica@math.unipd.it

Analogamente: $\lim_{x \to 5/2^-} f'(x) = 0$

<u>Segno $f'(x)$</u>

$f'(x) \geq 0 \iff 4-2x > 0 \iff x < 2$

		$3/2$		2		$5/2$	
$f'(x)$	$+++$		$+++$		$---$		$---$
$f(x)$	$\uparrow$		$\uparrow$		$\downarrow$		$\downarrow$

f cresce e decresce negli intervalli indicati

Max \ Min $\quad x = 2 \quad$ p.to max loc. (dopo prolungamento)

ES. 3 $\qquad (z-2)^3 = \dfrac{1-i}{1+i}$

Metto $z-2 = w$ e noto che

$$\frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{|1+i|^2} = \frac{1-2i-1}{2} = -i = e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

Dunque

$$w^3 = e^{-\pi/2\, i}, \qquad w = re^{i\vartheta}$$

Trovo

$$r^3 e^{3i\vartheta} = e^{-\pi/2\, i}$$

$$\begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\vartheta = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases} \qquad k = 0,1,2$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \vartheta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2}{3}k\pi \end{cases} \qquad ''$$

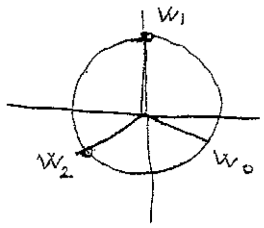
Trovo $\quad \vartheta_0 = -\frac{\pi}{6}, \ \vartheta_1 = \frac{\pi}{2}, \ \vartheta_2 = \frac{7}{6}\pi$

Soluzioni

$$w_0 = e^{-\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$w_1 = e^{\frac{\pi}{2}i} = i$$

$$w_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$



Da cui

$$z_0 = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

$$z_1 = 2 + i$$

$$z_2 = 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$$

#