Matematica A

Soluzione del Tema 4 del 8 Gennaio 2007

Esercizio 1. Calcolare in forma algebrica tutte le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$(z^2 + 2iz - 1)^2 = -256.$$

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra dobbiamo trovare quattro soluzioni. Osserviamo che $z^2 + 2iz - 1 = (z+i)^2$ e dunque, posto $w = z + i$, si ottiene l'equazione nell'incognita $w \in \mathbb{C}$

$$w^4 = -256.$$

Posto $w = re^{i\vartheta}$, con $r \geq 0$ e $\vartheta \in [0, 2\pi)$, e $-256 = 256e^{i\pi}$, si ottiene l'equazione $r^4 e^{4i\vartheta} = 256e^{i\pi}$, e quindi

$$r^4 = 256 \qquad 4\vartheta = \pi + 2k\pi, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

da cui si ricava $r = 4$ e $\vartheta = \pi/4 + k\pi/2$, $k = 0, 1, 2, 3$. Le quattro radici dell'equazione $w^4 = -256$ sono dunque

$$\begin{aligned}
w_1 &= 4e^{i\pi/4} = 4\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big) = 2(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\
w_2 &= 2(-\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \\
w_3 &= 2(-\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \\
w_4 &= 2(\sqrt{2} - i\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

Usando la relazione $z = w - i$ si ottengono le quattro soluzioni dell'equazione iniziale

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 1) \\
z_2 &= -2\sqrt{2} + i(2\sqrt{2} - 1) \\
z_3 &= -2\sqrt{2} - i(2\sqrt{2} + 1) \\
z_4 &= 2\sqrt{2} - i(2\sqrt{2} + 1).
\end{aligned}$$

Esercizio 2. Per ogni valore del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 + \tan\frac{1}{n}}{(1+n)^{2\alpha^2 - \frac{1}{2}}}.$$

Determinare i valori di α tali che:

i) il termine generale della serie tende a zero per $n \to +\infty$;

ii) la serie converge (semplicemente);

iii) la serie converge assolutamente.

Soluzione. i) La successione $b_n = (-1)^n(1 + \tan(1/n))$, $n \in \mathbb{N}$, non converge in quanto $b_{2n} \to 1$ e $b_{2n+1} \to -1$ per $n \to +\infty$. Tuttavia $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una succesione limitata. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+n)^{2\alpha^2-\frac{1}{2}}} = \begin{cases} +\infty & \text{per } 2\alpha^2 - \frac{1}{2} < 0, \\ 1 & \text{per } 2\alpha^2 - \frac{1}{2} = 0, \\ 0 & \text{per } 2\alpha^2 - \frac{1}{2} > 0. \end{cases}$$

Dunque, il termine generale della serie è infinitesimo se e solo se

$$2\alpha^2 - \frac{1}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad |\alpha| > \frac{1}{2}.$$

ii) È sufficiente restringere lo studio al caso $|\alpha| > 1/2$. In caso contrario la serie non può infatti convergere perchè manca la condizione necessaria di convergenza. Usiamo il Criterio di Leibniz e consideriamo la successione

$$a_n = \frac{1 + \tan\frac{1}{n}}{(1+n)^{2\alpha^2-\frac{1}{2}}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{$*$}$$

Per la discussione fatta al punto i), risulta $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$. Verifichiamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Basta osservare che $n \mapsto 1 + \tan(1/n)$ è decrescente e che $n \mapsto (1+n)^{2\alpha^2-\frac{1}{2}}$ è crescente (perchè $|\alpha| > 1/2$). Il quoziente di una successione decrescente con una crescente è decrescente.

In conclusione, per il Criterio di Leibniz la serie converge semplicemente per tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $|\alpha| > 1/2$.

iii) Dobbiamo studiare la convergenza della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, dove a_n è come in $(*)$. Usiamo il criterio del confronto asintotico scegliendo come successione di confronto

$$c_n = \frac{1}{n^{2\alpha^2-\frac{1}{2}}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

In primo luogo, osserviamo che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \tan\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2\alpha^2-\frac{1}{2}} = 1 \neq 0.$$

Inoltre sappiamo che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha^2-\frac{1}{2}}} < +\infty \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha^2 - \frac{1}{2} > 1.$$

Dunque, dal Teorema del confronto asintotico deduciamo che la serie converge assolutamente se e solo se $|\alpha| > \sqrt{3}/2$.

Esercizio 2. Sia f la funzione definita da

$$f(x) = e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}}.$$

i) Determinare il dominio di f ed eventuali simmetrie.
ii) Calcolare i limiti significativi ed eventuali asintoti.
iii) Studiare la continuità e la derivabilità di f.
iv) Calcolare la derivata prima e i limiti significativi di f'.
v) Studiare la monotonia di f e determinare i punti di estremo relativo ed assoluto.
vi) Tracciare un grafico qualitativo di f.
[Non è richiesto lo studio della derivata seconda.]

Soluzione.
Dominio. Occorre richiedere $9 - x^2 > 0$ e $\log(9 - x^2) \neq 0$. La prima disequazione è verificata per $-3 < x < 3$. La seconda condizione è equivalente a $9 - x^2 \neq 1$, ovvero a $x \neq \pm 2\sqrt{2}$. Dunque il dominio della funzione è

$$D(f) = (-3, 3) \setminus \{\pm 2\sqrt{2}\}.$$

La funzione è strettamente positiva in tutto il dominio.
Simmetrie. La funzione è pari, cioè $f(-x) = f(x)$, perchè la variabile x compare solamente al quadrato. D'ora in avanti studiamo la funzione solo per $x \geq 0$. Tutti i risultati per $x \leq 0$ si ottengono per simmetria.
Limiti. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 3^-} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} &= e^{\frac{1}{-\infty}} = e^0 = 1, \\
\lim_{x\to 2\sqrt{2}^+} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} &= e^{\frac{1}{\log 1^-}} = e^{\frac{1}{0^-}} = e^{-\infty} = 0, \\
\lim_{x\to 2\sqrt{2}^-} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} &= e^{\frac{1}{\log 1^+}} = e^{\frac{1}{0^+}} = e^{+\infty} = +\infty.
\end{aligned}$$

Per simmetria, troviamo subito gli altri limiti

$$\lim_{x\to -3^+} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} = 1, \qquad \lim_{x\to -2\sqrt{2}^-} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} = 0, \qquad \lim_{x\to -2\sqrt{2}^+} e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} = +\infty.$$

Asintoti. La retta di equazione $x = 2\sqrt{2}$ è un asintoto verticale da sinistra. Analogamente, $x = -2\sqrt{2}$ è un asintoto verticale da destra.

Continuità. La funzione è continua in tutto il dominio, in quanto composizione di funzioni continue. Ponendo $f(3) = 1$ ed $f(-3) = 1$ la funzione si prolunga con continuità anche nei punti $x = \pm 3$.

Derivata prima. La funzione è derivabile su tutto $D(f) = (-3, 3) \setminus \{\pm 2\sqrt{2}\}$. Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}} \frac{2x}{(9-x^2)\log^2(9-x^2)}.$$

A differenza di $f(x)$, la $f'(x)$ non si prolunga nei punti $x = \pm 3$.

Limiti significativi di $f'(x)$. Osserviamo preliminarmente che

$$\lim_{x \to 3^-} (9-x^2)\log^2(9-x^2) = \lim_{t \to 0^+} t \log^2 t = 0^+.$$

L'ultimo limite è noto. Deduciamo immediatamente che

$$\lim_{x \to 3^-} f'(x) = \frac{6}{0^+} = +\infty.$$

Il grafico di f arriva (crescendo) nel punto di coordinate $x = 3$ ed $y = 1$ con tangente verticale.

Poi osserviamo che

$$\lim_{x \to 2\sqrt{2}^+} \frac{e^{\frac{1}{\log(9-x^2)}}}{\log^2(9-x^2)} = \lim_{t \to 0^-} \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2} = \lim_{s \to +\infty} \frac{s^2}{e^s} = 0^+.$$

L'ultimo limite è noto. Abbiamo fatto la sostituzione $t = -1/s$. Deduciamo immediatamente che

$$\lim_{x \to 2\sqrt{2}^+} f'(x) = 0^+ \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9-8} = 0^+.$$

Il grafico di f parte (crescendo) dal punto di coordinate $x = 2\sqrt{2}$ ed $y = 0$ con tangente orizzontale.

Infine abbiamo

$$\lim_{x \to 2\sqrt{2}^-} f'(x) = \frac{4\sqrt{2}e^{+\infty}}{(9-8) \cdot 0^+} = +\infty,$$

coerentemente con la presenza di un asintoto verticale da sinistra. Gli altri limiti si ottengono per simmetria.

Monotonia. Studiamo il segno della derivata prima. Osserviamo che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{9-x^2} \geq 0.$$

Tenuto conto che $9 - x^2 > 0$ per ogni $x \in D(f)$, si conclude che $f'(x) \geq 0$ per tutte le $x \in D(f)$ con $x \geq 0$. In particolare $f'(x) = 0$ se e solo se $x = 0$. Dunque, abbiamo la seguente tabella

	-3	$-2\sqrt{2}$	0	$2\sqrt{2}$	3
$f'(x)$	$---$	$---$	$+++$	$+++$	
$f(x)$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	

Ovvero:

$$f \text{ è crescente nell'intervallo } [0, 2\sqrt{2}),$$
$$f \text{ è crescente nell'intervallo } (2\sqrt{2}, 3),$$

eventualmente con $x = 3$ incluso (dopo il prolungamento), etc.

Estremi. Il punto $x = 0$ è un punto di minimo locale (non assoluto) con $f(0) = e^{1/\log 9} > 1$. Dopo il prolungamento, i punti $x = \pm 3$ sono punti di massimo locale (non assoluto). Infine, si ha $\sup\limits_{D(f)} f = +\infty$ e $\inf\limits_{D(f)} f = 0$.

Grafico.

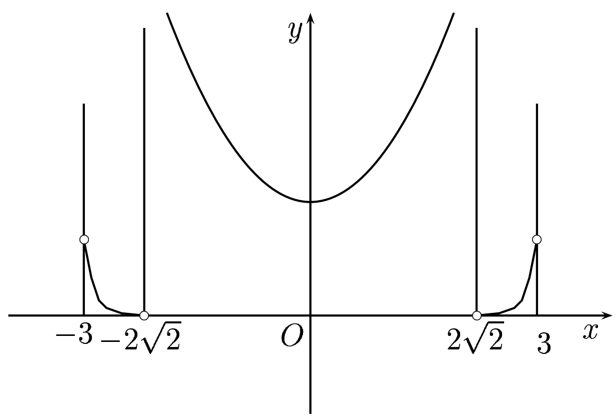

Grafico di $f(x)$

Esercizio 4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{\cos^2(5y)}{x(\log^2(x) - 5)}, \\ y(1) = -\frac{\pi}{5}. \end{cases}$$

i) Calcolare la soluzione del problema di Cauchy in forma implicita.

ii) Esprimere la soluzione in forma esplicita.

Soluzione. i) L'equazione differenziale è a variabili separabili. Le soluzioni costanti sono date dall'equazione $\cos(5y) = 0$, ovvero $5y = \pi/2 + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Siccome il dato iniziale del Problema di Cauchy impone $y(1) = -\pi/5$, la sua soluzione non è costante. Possiamo dunque supporre che la soluzione verifichi $\cos(5y) \neq 0$. In particolare avremo

$$-\frac{3\pi}{2} < 5y(x) < -\frac{\pi}{2}$$

per tutte le x appartenenti all'intervallo di definizione della soluzione.

Dividendo l'equazione differenziale per $\cos^2(5y) \neq 0$ si ottiene

$$\frac{y'}{\cos^2(5y)} = \frac{1}{x(\log^2(x) - 5)}.$$

Integriamo in x questa identità facendo integrali indefiniti. Integrale del membro di sinistra:

$$\int \frac{y'(x)}{\cos^2(5y(x))} dx = \int \frac{1}{\cos^2(5y)} dy = \frac{1}{5} \tan(5y(x)).$$

Integriamo il membro di destra con la sostituzione $t = \log x$ e $dt = \frac{1}{x} dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(\log^2(x) - 5)} dx &= \int \frac{1}{t^2 - 5} dt = \frac{1}{2\sqrt{5}} \int \Big(\frac{1}{t - \sqrt{5}} - \frac{1}{t + \sqrt{5}} \Big) dt = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{t - \sqrt{5}}{t + \sqrt{5}} \right| + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right| + C. \end{aligned}$$

Dunque si ottiene la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\frac{1}{5} \tan(5y(x)) = \frac{1}{2\sqrt{5}} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right| + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$. Determiniamo la costante C imponendo il dato iniziale $x = 1$ ed $y(1) = -\pi/5$. Siccome $\tan(-\pi) = 0$, si ottiene immediatamente $C = 0$. La soluzione del Problema di Cauchy in forma implicita è dunque

$$\tan(5y(x)) = \frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right|. \qquad (*)$$

ii) Osserviamo che la funzione

$$\varphi(x) = \frac{1}{5} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right| \right)$$

non è la soluzione del Problema di Cauchy, perchè non verifica il dato iniziale, infatti $\varphi(1) = 0 \neq -\pi/5$. La funzione φ è ottenuta dalla $(*)$ con un procedimento di inversione scorretto.

La funzione $\arctan : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ è la funzione inversa di $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$. Dunque, per definizione,

$$\arctan(\tan(z)) = z \quad \text{per } z \in (-\pi/2, \pi/2). \tag{$**$}$$

Dalla discussione all'inizio del punto i), sappiamo che $5y \in (-3\pi/2, -\pi/2)$. Dunque $5y$ non appartiene al dominio di inversione della funzione tan e non possiamo pertanto scrivere $\arctan(\tan(5y)) = 5y$. Tuttavia, la funzione $z = 5y + \pi$ verifica $z \in (-\pi/2, \pi/2)$ e ora possiamo usare $(**)$

$$5y + \pi = z = \arctan(\tan(z)) = \arctan(\tan(5y + \pi)) = \arctan(\tan(5y)).$$

Abbiamo usato anche il fatto che tan è π-periodica. Dunque, dalla soluzione in forma implicita $(*)$ troviamo

$$5y(x) + \pi = \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right| \right),$$

da cui si ottiene la soluzione in forma esplicita

$$y(x) = \frac{1}{5} \left(-\pi + \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \log \left| \frac{\log x - \sqrt{5}}{\log x + \sqrt{5}} \right| \right) \right).$$

Infine, discutiamo il valore assoluto. La soluzione $y(x)$ del Problema di Cauchy è definita nell'intervallo massimale $x \in (e^{-\sqrt{5}}, e^{\sqrt{5}})$. Si noti che il punto iniziale $x = 1$ appartiene a questo intervallo. Dunque, si ha

$$y(x) = -\frac{\pi}{5} + \frac{1}{5} \arctan \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \log \left(\frac{\sqrt{5} - \log x}{\sqrt{5} + \log x} \right) \right).$$