Matematica A

Soluzione del Tema 4 del 7 Gennaio 2008

Esercizio 1. Si consideri la funzione

$$f(x) = \log \frac{1}{x^2 + |2x+3|}.$$

i) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti significativi ed eventuali asintoti.

ii) Discutere la continuità, la derivabilità di f e la presenza di eventuali punti angolosi.

iii) Studiare gli intervalli di monotonia. Punti di massimo e minimo, relativi e assoluti.

iv) Studiare concavità, convessità di f, determinando eventuali punti di flesso.

v) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che

$$f(x) = \log \frac{1}{x^2 + |2x+3|} = -\log(x^2 + |2x+3|).$$

Dominio. Si ha $D(f) = \mathbb{R}$ in quanto $x^2 + |2x+3| > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Segno. Risulta $f(x) > 0$ se e solo se $x^2 + |2x+3| < 1$. Studiamo questa disequazione distinguendo due casi:

Caso 1: $x \geq -3/2$. In questo caso si ha:

$$x^2 + |2x+3| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x + 3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2 + 1 < 0,$$

che non è mai verificata. Dunque $f(x) < 0$ nel *Caso 1*.

Caso 2: $x < -3/2$. In questo caso si ha:

$$x^2 + |2x+3| < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 3 < 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x - 4 < 0.$$

Le radici dell'equazione $x^2 - 2x - 4 = 0$ sono $x = 1 \pm \sqrt{5}$, e quindi:

$$x^2 - 2x - 4 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}.$$

Tenuto conto che $x < -3/2$ e osservato che $-3/2 < 1 - \sqrt{5}$, concludiamo che $f(x) < 0$ nel *Caso 2*.

In definitiva, $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Limiti. È immediato verificare che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty.$$

Asintoti. Non ci sono nè asintoti verticali nè asintoti orizzontali. Esaminiamo l'eventuale presenza di asintoti obliqui. Per $\to +\infty$, si trova con il Teorema di Hôpital

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{\log(x^2 + 2x + 3)}{x} = -\lim_{x \to +\infty} \frac{2x + 2}{x^2 + 2x + 3} = 0.$$

L'asintoto dovrebbe essere orizzontale, che non c'è. Per $x \to -\infty$ i conti sono identici. In conclusione, non si sono asintoti obliqui.

Continuità. La funzione f è continua nel dominio, perchè composizione di funzioni continue.

Derivabilità. La funzione f è derivabile per $x \neq -3/2$ in quanto composizione di funzioni derivabili. In $x = -3/2$ ci aspettiamo un punto angoloso a causa della presenza del valore assoluto che si annulla in tale punto.

Derivata prima. Calcoliamo $f'(x)$ per $x \neq -3/2$. Un breve conto fornisce:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2(x+1)}{x^2 + 2x + 3} & \text{per } x > -3/2, \\ \dfrac{-2(x-1)}{x^2 - 2x - 3} & \text{per } x < -3/2. \end{cases}$$

Punti angolosi. Calcoliamo i limiti destro e sinistro di $f'(x)$ nel punto $-3/2$. Si trova

$$\lim_{x \to -3/2^-} f'(x) = \frac{20}{9}, \qquad \lim_{x \to -3/2^+} f'(x) = \frac{4}{9}.$$

Dunque, in corrispondenza di $x = -3/2$ c'è un punto angoloso. Il grafico di f arriva da sinistra nel punto di coordinate $\big(-3/2, f(-3/2)\big)$ in modo crescente con pendenza $20/9$, poi riparte (sempre crescendo) con pendenza $4/9$.

Monotonia. Studiamo la disequazione $f'(x) \geq 0$ distinguendo due casi.

Caso 1: $x > -3/2$. In questo caso si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x+1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1.$$

Dunque, $f'(x) \geq 0$ per $x \in (-3/2, -1]$ e $f'(x) < 0$ per $x \in (-1, +\infty)$.

Caso 2: $x < -3/2$. In questo caso si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2(x-1) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 1,$$

che è sempre verificata nel caso in esame.

Riassumiamo i risultati nella seguente tabella:

$$-3/2 \qquad -1$$

$f'(x)$	$+++$	$+++$	$---$
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$

In $x = -3/2$ la derivata non è definita, mentre $f'(-1) = 0$. Dalla tabella deduciamo che f è crescente nell'intervallo $(-\infty, -1]$ ed è decrescente in $[-1, +\infty)$.

Punti di max-min. Il punto $x = -1$ è il punto (unico) di massimo assoluto della funzione e il valore massimo è $f(-1) = -\log 2$. Non ci sono punti di minimo nè assoluto nè locale.

Derivata seconda. Calcoliamo $f''(x)$ per $x \neq -3/2$. Dopo un breve conto e qualche semplificazione si trova:

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(x^2+2x-1)}{(x^2+2x+3)^2} & \text{per } x > -3/2, \\ \dfrac{2(x^2-2x+5)}{(x^2-2x-3)^2} & \text{per } x < -3/2. \end{cases}$$

Convessità. Studiamo la disequazione $f''(x) \geq 0$ distinguendo due casi.

Caso 1: $x > -3/2$. In questo caso si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 1 \geq 0.$$

Le radici del'equazione $x^2 + 2x - 1 = 0$ sono $x = -1 \pm \sqrt{2}$. Osservato che $-1 - \sqrt{2} < -3/2 < -1 + \sqrt{2}$, deduciamo che $f''(x) \geq 0$ per $x \in [-1+\sqrt{2}, +\infty)$ e $f''(x) < 0$ per $x \in (-3/2, -1+\sqrt{2})$. In particolare, $f''(-1+\sqrt{2}) = 0$.

Caso 2: $x < -3/2$. In questo caso si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + 4 \geq 0,$$

che è sempre verificata.

Riassumiamo i risultati nella seguente tabella:

$$-3/2 \quad -1+\sqrt{2}$$

$f''(x)$	$+++$	$---$	$+++$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Ovvero: f è convessa nell'intervallo $(-\infty, -3/2]$, è concava nell'intervallo $[-1, -1+\sqrt{2}]$, ed è convessa in $[-1+\sqrt{2}, +\infty)$.

Punti di flesso. Il punto $x = -1+\sqrt{2}$ è un punto di flesso. A seconda delle convenzioni, potremmo considerare anche $x = -3/2$ un punto di flesso (nel senso che c'è un passaggio dalla convessità alla concavità), ma in effetti la funzione non si "flette", essendoci un punto angoloso.

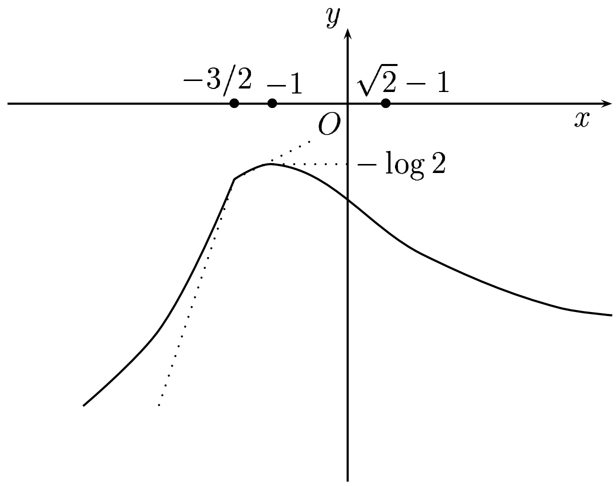

Grafico di $f(x)$

Esercizio 2. Studiare il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^{n+2}}{3^n (n+3)!}.$$

Svolgimento. Il termine generale della serie

$$a_n = \frac{(n+1)^{n+2}}{3^n (n+3)!}$$

è positivo e dunque possiamo applicare il Criterio del rapporto. Formiamo il rapporto

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+2)^{n+3}}{3^{n+1}(n+4)!} \frac{3^n (n+3)!}{(n+1)^{n+2}} \\ &= \frac{1}{3(n+4)} \frac{(n+2)^{n+3}}{(n+1)^{n+2}} \\ &= \frac{(n+2)^2}{3(n+1)(n+4)} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \\ &= \frac{(n+2)^2}{3(n+1)(n+4)} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Dai limiti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+2)^2}{3(n+1)(n+4)} = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$$

si deduce che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{e}{3} < 1,$$

in quanto $e < 3$. Per il Criterio del rapporto la serie converge.

Esercizio 3. Si consideri il polinomio nella variabile complessa $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = z^4 + 4^4.$$

(a) Scomporre $P(z)$ come prodotto di quattro polinomi di primo grado.

(b) Scomporre $P(z)$ come prodotto di due polinomi di secondo grado a coefficienti reali.

Soluzione. Per il Teorema fondamentale dell'algebra il polinomio $P(z)$ si scompone nel seguente modo

$$P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3),$$

dove z_0, z_1, z_2, z_3 sono le quattro radici dell'equazione $z^4 = -4^4 = 4^4 e^{i\pi}$. Posto $z = re^{i\vartheta}$, si trova

$$r = 4 \quad \text{e} \quad \vartheta = \vartheta_k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Dunque le radici in forma algebrica sono

$$\begin{aligned} z_0 &= 4e^{i\pi/4} = 2\sqrt{2}(1 + i) \\ z_1 &= 4e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}(-1 + i) \\ z_2 &= 4e^{i5\pi/4} = 2\sqrt{2}(-1 - i) \\ z_3 &= 4e^{i7\pi/4} = 2\sqrt{2}(1 - i). \end{aligned}$$

Siccome il polinomio $P(z)$ ha coefficienti reali sappiamo a priori che le radici devono essere coniugate a coppie, e infatti risulta $z_2 = \bar{z}_1$ e $z_3 = \bar{z}_0$. Quindi abbiamo la fattorizzazione

$$P(z) = (z - z_0)(z - \bar{z}_0)(z - z_1)(z - \bar{z}_1).$$

Ora osserviamo che

$$\begin{aligned} (z - z_0)(z - \bar{z}_0) &= z^2 - (z_0 + \bar{z}_0)z + z_0\bar{z}_0 \\ &= z^2 - 2\mathrm{Re}(z_0)z + |z_0|^2 \\ &= z^2 - 4\sqrt{2}z + 16, \end{aligned}$$

e analogamente $(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = z^2 + 4\sqrt{2}z + 16$. Dunque una scomposizione che verifica la richiesta della domanda (b) è

$$P(z) = (z^2 - 4\sqrt{2}z + 16)(z^2 + 4\sqrt{2}z + 16).$$