Matematica A

Soluzione del Tema 4 del 6 Settembre 2007

Esercizio 1. Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = x^{3/4} \log^3 x, \qquad f(0) = 0.$$

i) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti significativi ed eventuali asintoti.

ii) Stabilire dove f è continua, dove è derivabile.

iii) Calcolare la derivata prima e i limiti significativi di f'. Studiare la monotonia di f e determinare i punti di estremo relativo ed assoluto.

iv) (*facoltativo*) Studiare concavità e convessità, determinare eventuali punti di flesso.

v) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Soluzione.
Dominio. Per $x = 0$ la funzione è definita. Il logaritmo è definito per $x > 0$, e dunque $x^{3/4} \log^3 x$ è definita per $x > 0$. Dunque, il dominio di f è

$$D(f) = [0, +\infty).$$

Segno. Studiamo la disequazione

$$f(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^{3/4} \log^3 x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log^3 x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > 1.$$

Nei punti $x = 0$ e $x = 1$ la funzione si annulla. Per $x > 1$ la funzione è strettamente positiva. Per $0 < x < 1$ la funzione è strettamente negativa.

Limiti. Calcoliamo il limite per $x \to +\infty$. Abbiamo:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{1/4} \log x = +\infty.$$

Calcoliamo il limite per $x \to 0^+$. Osserviamo preliminarmente che, per il Teorema di Hôspital, si ha

$$\lim_{x \to 0^+} x^{1/4} \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-1/4}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/4x^{-5/4}} = -4 \lim_{x \to 0^+} x^{1/4} = 0,$$

e dunque,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \Big(\lim_{x \to 0^+} x^{1/4} \log x \Big)^3 = 0.$$

Asintoti. Occorre controllare la presenza di un asintoto obliquo. Si cerca

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x^{-1/4} \log^3 x = 0.$$

L'ultimo limite è noto. Si può comunque calcolare con Hôspital come sopra. Ora si cerca

$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Dunque non c'è asintoto obliquo.

Continuità e derivabilità. La funzione è continua per $x > 0$ perchè prodotto di funzioni continue. La funzione è continua anche nel punto $x = 0$, perchè $f(0) = \lim_{x\to0^+} f(x)$. La funzione f è derivabile per $x > 0$.

Derivata prima e limiti di $f'(x)$. Il calcolo della derivatà prima di f fornisce

$$f'(x) = \frac{3\log^2 x}{x^{1/4}} \Big\{ \frac{1}{4} \log x + 1 \Big\}.$$

Dunque, si trova

$$\lim_{x\to0^+} f'(x) = -\infty.$$

La derivatà prima di f non si estende in modo continuo nel punto $x = 0$. La funzione f "parte" da 0 decrescendo con tangente verticale.

Monotonia, punti di estremo. Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3\log^2 x}{x^{1/4}} \Big\{ \frac{1}{4} \log x + 1 \Big\} > 0.$$

Osserviamo che $f'(1) = 0$. Poi:

$$\frac{1}{4} \log x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x > -4 \quad \Leftrightarrow \quad x > e^{-4}.$$

Inoltre $f'(e^{-4}) = 0$. Dunque i punti $x = e^{-4}$ e $x = 1$ sono i punti critici della funzione. Abbiamo la seguente tabella:

	0	e^{-4}	1
$f'(x)$	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
$f(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\uparrow$

Il punto $x = e^{-4}$ è l'unico punto di minimo assoluto della funzione. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo locale. Il punto $x = 1$ non è un punto di estremo (è solo punto critico).

Derivata seconda. Un breve conto fornisce l'espressione per la derivata seconda

$$f''(x) = \frac{3}{16}\frac{\log x}{x^{5/4}}\big\{-\log^2 x + 8\log x + 32\big\}.$$

Studiamo il segno di $f''(x)$. Posto $t = \log x$, si ha

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(-t^2 + 8t + 32) \geq 0.$$

L'equazione $t^2 - 8t - 32 = 0$ ha le radici $t_1 = 4(1-\sqrt{3})$ e $t_2 = 4(1+\sqrt{3})$. Dunque, $-t^2 + 8t + 32 \geq 0$ se e solo se $t_1 \leq t \leq t_2$. Poniamo $x_1 = e^{t_1}$ e $x_2 = e^{t_2}$. Osserviamo che $e^{-4} < x_1 < 1 < x_2$.

Convessità, punti di flesso. Riassumiamo lo studio del segno nella seguente tabella:

	0 — x_1	x_1 — 1	1 — x_2	x_2 —
$\log x$	$---$	$---$	$+++$	$+++$
$-\log^2 x + 8\log x + 32$	$---$	$+++$	$+++$	$---$
$f''(x)$	$+++$	$---$	$+++$	$---$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$

I punti $x = x_1$, $x = 1$ e $x = x_2$ sono punti di flesso. La funzione è convessa negli intervalli $[0, x_1]$ e $[1, x_2]$, ed è concava negli intervalli $[x_1, 1]$ e $[x_2, +\infty)$.

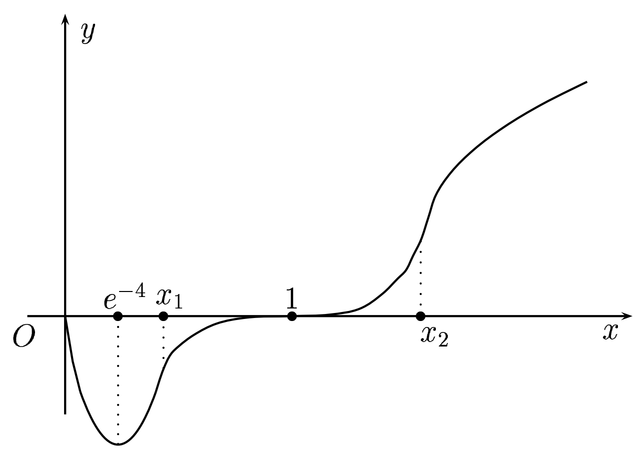


Grafico di $f(x)$

Esercizio 2. Disegnare nel piano di Gauss l'insieme degli $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1.$$

Soluzione. Affinchè l'espressione sia ben definita $z \in \mathbb{C}$ deve verificare il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} |z-4| \leq 4 \\ |z+4i| < 4. \end{cases}$$

La prima disequazione è verificata dai punti $z \in \mathbb{C}$ che si trovano all'interno del cerchio di raggio 4 centrato nel punto 4 dell'asse Rez, bordo del cerchio incluso.
La seconda disequazione è verificata dai punti $z \in \mathbb{C}$ che si trovano all'interno del cerchio di raggio 4 centrato nel punto $-4i$ sull'asse Imz, bordo del cerchio escluso.
Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{4-|z-4|}}{\sqrt{4-|z+4i|}} > 1 \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{4-|z-4|} > \sqrt{4-|z+4i|} \\ &\Leftrightarrow \quad |z-4| < |z+4i|. \end{aligned}$$

Posto $z = x + iy$, troviamo la disequazione equivalente

$$|x+iy-4|^2 < |x+iy+4i|^2 \quad \Leftrightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 < x^2 + (y+4)^2 \quad \Leftrightarrow \quad -x < y.$$

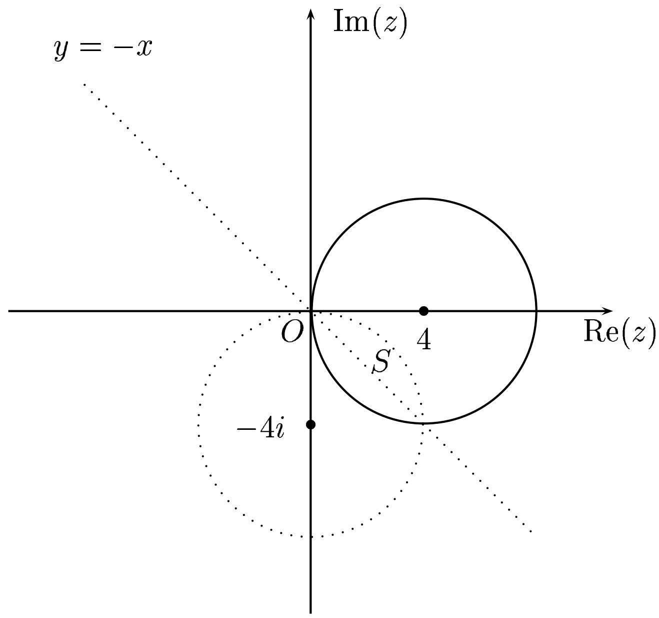
I punti $z \in \mathbb{C}$ che verificano questa disequazione si trovano sopra la bisettrice del secondo e quarto quadrante.
Dunque l'insieme S delle seluzioni è la "semiluna" indicata in figura. Il bordo è escluso.

Esercizio 3. Calcolare in forma implicita la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{e^{-y^2}}{y^3} \dfrac{x+2}{\sqrt{x}-2} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. Osserviamo preliminarmente che deve essere $y > 0$, $x \geq 0$ e $x \neq 4$. Tenuto conto del dato iniziale, la soluzione del Problema di Cauchy si trova nella regione del piano dove $y > 0$ e $0 \leq x < 4$.
L'equazione differenziale è a variabili separabili e non ha soluzioni costanti. Separando le variabili si ottiene

$$y^3 e^{y^2} y' = \frac{x+2}{\sqrt{x}-2}.$$



Integriamo i membri di destra e sinistra facendo integrali indefiniti. Facendo un'integrazione per parti, abbiamo

$$\int y^3 e^{y^2} y' dx = \int y^3 e^{y^2} dy = \frac{1}{2}\Big(y^2 e^{y^2} - \int 2ye^{y^2} dy\Big) = \frac{1}{2} e^{y^2}(y^2-1).$$

[La costante addittiva verrà aggiunta nel secondo integrale].
Integriamo il membro di destra facendo il cambiamento di variabile $\sqrt{x} = t$, ovvero $x = t^2$ con $dx = 2tdt$. Si trova:

$$\int \frac{x+2}{\sqrt{x}-2} dx = \int \frac{2t^3+4t}{t-2} dt.$$

Facendo una divisione di polinomi si trova la scomposizione

$$\frac{2t^3+4t}{t-2} = 2t^2 + 4t + 12 + \frac{24}{t-2},$$

e quindi

$$\int \frac{2t^3+4t}{t-2} dt = \int \Big(2t^2 + 4t + 12 + \frac{24}{t-2}\Big) dt = \frac{2}{3} t^3 + 2t^2 + 12t + 24 \log|t-2| + C,$$

con $C \in \mathbb{R}$.
Ritornando alla x ed eguagliando gli integrali del membro di destra e di quello di sinistra si trova la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$\frac{1}{2} e^{y^2}(y^2-1) = \frac{2}{3} x^{3/2} + 2x + 12\sqrt{x} + 24 \log|\sqrt{x}-2| + C.$$

La costante C si determina imponendo il dato iniziale $x = 1$ e $y = 1$. Si trova

$$0 = \frac{2}{3} + 2 + 12 + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{44}{3}.$$