Matematica A

Soluzione del Tema 4 del 20 Settembre 2007

Esercizio 1. Sia f la funzione così definita:

$$f(x) = \frac{e^{-|x-2|}}{3x^2 - 13x + 14}.$$

i) Determinare il dominio di f, il segno, i limiti significativi ed eventuali asintoti.

ii) Stabilire dove f è continua e dove è derivabile.

iii) Calcolare la derivata prima. Studiare la monotonia di f e determinare i punti di estremo relativo ed assoluto.

iv) Tracciare un grafico qualitativo di f.

Non è richiesto lo studio di f''.

Soluzione.
Dominio. Il dominio di f è l'insieme delle $x \in \mathbb{R}$ tali che $3x^2 - 13x + 14 \neq 0$. Le radici del polinomio sono 2 e 7/3. Dunque

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 2, 7/3\} = \mathbb{R} \setminus \{2, 7/3\}.$$

Segno. La funzione è positiva se e solo se il denominatore è positivo. Dunque

$$\begin{aligned} f(x) > 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 3x^2 - 13x + 14 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, 2) \cup (7/3, +\infty). \end{aligned}$$

Risulta $f(x) \neq 0$ per ogni $x \in D(f)$.

Limiti. I seguenti limiti sono elementari

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to 2^{\pm}} f(x) = \mp\infty, \qquad \lim_{x \to 7/3^{\pm}} f(x) = \pm\infty.$$

Asintoti. Asintoti orizzontali: $y = 0$. Asintoti verticali: $x = 2$ e $x = 7/3$.

Continuità e derivabilità. La funzione è continua e derivabile in tutto il dominio perchè quoziente di funzioni derivabili. Si osservi che la funzione $e^{-|x-2|}$ non è derivabile nel punto $x = 2$, che tuttavia non appartiene al dominio di f.

Derivata prima. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{x-2}{|x-2|}(3x^2-13x+14)-(6x-13)}{(3x^2-13x+14)^2}e^{-|x-2|},$$

e tenuto conto del segno di $x-2$ si trova

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-19x+27}{(3x^2-13x+14)^2}e^{-|x-2|}, & x<2, \\ \dfrac{-3x^2+7x-1}{(3x^2-13x+14)^2}e^{-|x-2|}, & x>2,\, x\neq 7/3. \end{cases}$$

Coerentemente con i limiti di f, si trova

$$\lim_{x\to 2} f'(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to 7/3} f'(x) = -\infty.$$

Monotonia, punti di estremo. Studiamo il segno di f'. Occorre distinguere due casi.

Caso 1: $x<2$. Allora

$$f'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-19x+27>0.$$

Le radici dell'equazione $3x^2-19x+27=0$ sono $x=\frac{1}{6}(19\pm\sqrt{37})$, e siccome $\frac{1}{6}(19-\sqrt{37})>2$ deduciamo che $f'(x)>0$ per ogni $x<2$.

Caso 2: $x>2$ (e $x\neq 7/3$). Allora

$$f'(x)>0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x^2+7x-1>0.$$

Le radici dell'equazione $-3x^2+7x-1=0$ sono $x=\frac{1}{6}(7\pm\sqrt{37})$. Osserviamo che

$$\frac{7-\sqrt{37}}{6}<2<\frac{7+\sqrt{37}}{6}<\frac{7}{3}.$$

Posto $x_0=\frac{1}{6}(7+\sqrt{37})$, abbiamo $f'(x)>0$ per $x\in(2,x_0)$, mentre $f'(x)<0$ per $x\in(x_0,7/3)\cup(7/3,+\infty)$. Si ha $f'(x_0)=0$.

Riassumiamo la discussione dei due casi nella seguente tabella:

	2	x_0	7/3	
$f'(x)$	$+++$	$+++$	$---$	$---$
$f(x)$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\downarrow$	$\downarrow$

La funzione f è crescente nell'intervallo $(-\infty,2)$ e nell'intervallo $(2,x_0]$. La funzione f è decrescente nell'intervallo $[x_0,7/3)$ e nell'intervallo $(7/3,+\infty)$. Il punto x_0 è un punto di massimo locale

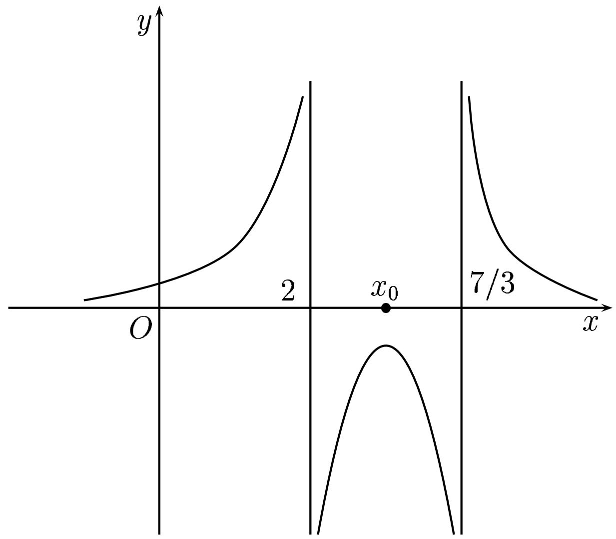

Grafico di $f(x)$

Esercizio 2. Sapendo che $z_0 = 2i$ è radice del polinomio della variabile complessa $z \in \mathbb{C}$

$$P(z) = z^3 - 2iz^2 + (12 + 5i)z - 24i + 10$$

trovare tutte le altre radici in forma algebrica.

Soluzione. Se $z_0 = 2i$ è una radice, allora il polinomio P ha la fattorizzazione

$$P(z) = (z - 2i)(z^2 + az + b)$$

dove i valori $a, b \in \mathbb{C}$ si possono determinare con l'algoritmo della divisione di $P(z)$ per $z - 2i$ oppure, equivalentemente, svolgendo il prodotto e confrontando i coefficienti. Si trova $a = 0$ e $b = 12 + 5i$. Dunque dobbiamo trovare le soluzioni dell'equazione $z^2 + 12 + 5i = 0$. Posto $z = x + iy$, si trova l'equazione

$$x^2 + 2ixy - y^2 + 12 + 5i = 0.$$

Separando parte reale e parte immaginaria, si ottiene il sistema di due equazioni

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 12 = 0 \\ 2xy + 5 = 0. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava $y = -\frac{5}{2x}$, e sostituendo nella prima si ottiene l'equazione

$$4x^4 + 48x^2 - 25 = 0.$$

Posto $x^2 = t$, le radici dell'equazione $4t^2 + 48t - 25 = 0$ sono $t = 1/2$ e $t = -25/2$. Solo la prima è accettabile. Si ottengono le soluzioni

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad y = -\frac{5}{2} \cdot (\pm\sqrt{2}) = \mp\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Dunque le soluzioni sono

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - 5i), \quad z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + 5i).$$

Esercizio 3. Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan x & \text{per } x \leq 0 \\ ae^x + bx + c & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Determinare i parametri $a, b, c \in \mathbb{R}$ in modo tale che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e sia inoltre

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Facoltativo: La funzione f appartiene a $C^2(\mathbb{R})$?

Soluzione. Iniziamo a considerare il limite. Deve essere

$$1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{ae^x + bx + c}{x} = b + a \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x}.$$

Questo può avvenire se e solo se $b = 1$ e $a = 0$. Se infatti $a > 0$ il limite sarebbe $+\infty$, e se $a < 0$ il limite a sinistra sarebbe $-\infty$.
Dunque la funzione deve essere della forma

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \arctan x & \text{per } x \leq 0 \\ x + c & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Questa funzione è continua per tutti i punti $x \neq 0$, indipendentemente dal parametro c. Per determinare c imponiamo che i limiti destro e sinistro in 0 siano uguali a $f(0) = 1 + \arctan 0 = 1$:

$$1 = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = c.$$

Abbiamo trovato $c = 1$. Rimane da controllare che la funzione così ottenuta è di classe $C^1(\mathbb{R})$. Osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1.$$

(Per verificare questo limite nel caso $x \to 0^-$ basta ricordare che $\arctan x = x + o(x)$.) Quindi f è derivabile nel punto $x = 0$ con $f'(x) = 1$. Per $x \neq 0$ la funzione è derivabile, e precisamente

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{per } x < 0 \\ 1 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Per $x \neq 0$, $f'(x)$ è continua. Infine, osserviamo che

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 1 = f'(0),$$

ovvero la funzione f' è continua anche in $x = 0$. Questo prova che $f \in C^1(\mathbb{R})$.
Per rispondere alla domanda facoltativa, notiamo che per $x \neq 0$ si ha

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2} & \text{per } x < 0 \\ 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

La funzione f'' è sicuramente continua per $x \neq 0$. Facendo il limite del rapporto incrementale di f' nel punto 0 si vede che f' è derivabile in $x = 0$ e inoltre $f''(0) = 0$. Infine, si nota che

$$\lim_{x \to 0^+} f''(x) = \lim_{x \to 0^-} f''(x) = 0 = f''(0),$$

e quindi f'' è continua anche nel punto $x = 0$. Dunque $f \in C^2(\mathbb{R})$.