Decomposizione di campi vettoriali

Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto, sia $F : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo vettoriale (1-forma differenziale). Se $F \in C^1(A;\mathbb{R}^n)$ è conservativo

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \quad \text{su } A, \quad i,j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

allora F è localmente il gradiente di una funzione (forma localmente esatta):

$$F = \nabla f \qquad \text{con } f \in C^1. \tag{2}$$

Se togliamo la condizione (1), F non ammette un potenziale. Tuttavia possiamo chiederci se risulti

$$F = \nabla f + E \tag{3}$$

dove $E : A \to \mathbb{R}^n$ è un errore con proprietà opportune. Questa è una decomposizione additiva di F ("decomposizione di Helmoltz").

Indichiamo con $H^1(A) = \{ f \in L^2(A) \,;\, \nabla f \in L^2(A;\mathbb{R}^n) \}$ (gradiente debole) lo spazio di Sobolev delle funzioni L^2 con derivate deboli in $L^2(A)$. É uno spazio di Hilbert.

Diciamo che un campo vettoriale $E \in L^2(A;\mathbb{R}^n)$ verifica l'equazione "divergenza nulla"

$$\operatorname{div} E = 0 \qquad \text{in } A \tag{4}$$

in senso distribuzionale se

$$\int_A \langle E(x), \nabla\varphi(x) \rangle \, dx = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(A). \tag{5}$$

<u>Teorema</u> Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato (e connesso) con frontiera ∂A regolare (ad es. Lipschitz). Per ogni $F \in L^2(A;\mathbb{R}^n)$ esistono $f \in H^1(A)$ ed $E \in L^2(A;\mathbb{R}^n)$ con divergenza distribuzionale nulla tali che

$$(6) \qquad F = \nabla f + E.$$

Questa decomposizione è unica assumendo $\int_A f \, dx = 0$.

Dimostrazione. $H = \{ f \in H^1(A) ; \int_A f \, dx = 0 \}$ è uno spazio di Hilbert. Il funzionale $J : H \to \mathbb{R}$

$$(7) \qquad J(f) = \int_A |\nabla f - F|^2 dx$$

è convesso.

É valida la disuguaglianza di Poincaré

$$(8) \qquad \int_A |f - f_A|^2 \leq C_A \int_A |\nabla f|^2$$

con $f_A = \frac{1}{|A|} \int_A f \, dx = 0$, nel nostro caso.

Dunque l'insieme

$$(9) \qquad \underset{\substack{\cap \\ H}}{K} = \left\{ f \in H ; \int_A |\nabla f - F|^2 dx \leq \int_A |F|^2 dx < \infty \right\}$$

è limitato, convesso e chiuso. Dunque è compatto per la topologia debole di $H^1(A)$.

Inoltre $f \longmapsto J(f)$ è semicontinuo inferiormente per la topologia debole. Per il metodo diretto

$$(10) \qquad \min_{(f \in H)} \{ J(f) ; f \in K \}$$

è raggiunto.

Sia $f \in H$ un minimo. Siccome J è strettamente convesso su H (non però su $H^1(A)$) questo minimo è unico

Fissata $\varphi \in C_c^\infty(A)$ con $\int_A \varphi \, dx = 0$, si ha

$$(11) \qquad g(t) := \int_A |\nabla f + t \nabla \varphi - F|^2 dx \geq g(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

In effetti, g è un polinomio di grado 2.

Dunque

$$(12) \qquad 0 = g'(0) = 2 \int_A \langle \nabla \varphi, \nabla f - F \rangle \, dx .$$

In effetti l'equazione vale per ogni $\varphi \in C_c^\infty(A)$, basta applicare il ragionamento precedente a $\varphi - \frac{1}{|A|} \int_A \varphi \, dx$.

Dunque $E := \nabla f - F$ ha divergenza nulla in senso distribuzionale.

$\square$

<u>Commento 1</u> La condizione necessaria (12) vale anche quando $\varphi \in C^1(\bar{A})$ senza "supporto compatto". Con un conto "formale" si ottiene una condizione ulteriore su E:

$$(13) \qquad 0 = \int_A \langle \nabla \varphi, E \rangle \, dx = \int_A \{ \mathrm{div}(\varphi E) - \varphi \underbrace{\mathrm{div}(E)}_{\equiv 0} \} \, dx$$

$$= \int_{\partial A} \varphi \langle E, N_{\partial A} \rangle \, dH^{n-1}$$

dove $N_{\partial A}$ è la normale esterna a ∂A,
si deduce che $\langle E, N_{\partial A} \rangle \equiv 0$ su ∂A, ovvero E è tangente a ∂A.

Commento 2 La decomposizione $F = \nabla f + E$ si ottiene anche sostituendo $\int_A f\,dx = 0$ con $f \in H^1_0(A)$, ovvero $f = 0$ su ∂A nel senso degli spazi di Sobolev.

Decomposizione polare di matrici

Teorema Per $n \in \mathbb{N}$, sia $M \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice reale $n \times n$. Esistono una matrice simmetrica semidefinita positiva $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ ed una matrice ortogonale $O \in O_n(\mathbb{R})$ tali che $M = S\,O$.

Su $M_n(\mathbb{R})$ definiamo il prodotto scalare

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} \langle A, B \rangle &= tr\,(A^T B) = \sum_{i=1}^{n} (A^T B)_{ii} = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} A^T_{ij} B_{ji} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ji} B_{ji} \end{aligned}$$

con la norma $\| A \| = \langle A, A \rangle^{1/2}$.

$O_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$ è compatto e dunque esiste $O \in O_n(\mathbb{R})$ tale che

$$\text{(15)} \qquad \| M - O \| \leq \| M - U \| \quad \text{per ogni } U \in O_n(\mathbb{R}).$$

Siccome $\| O \| = \| U \| = n$, la (15) equivale a

$$\text{(16)} \qquad \langle M, U \rangle \leq \langle M, O \rangle \quad \text{per ogni } U \in O_n(\mathbb{R}).$$

Sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ una matrice antisimmetrica, $A = -A^T$.
Siccome lo spazio tangente a $O_n(\mathbb{R})$ nel punto $I \in O_n(\mathbb{R})$ sono le matrici antisimmetriche esiste una curva di matrici $\varepsilon \mapsto U(\varepsilon) \in O_n(\mathbb{R})$ tale che $U(0) = I$ e $\dot{U}(0) = A$. Dalla (16) si deduce che

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} \langle M, U(\varepsilon) O \rangle = \langle M, AO \rangle$$

$$(17) \qquad = \mathrm{tr}(M^T A O) = \mathrm{tr}(O M^T A)$$

$$= \langle M O^T, A \rangle$$

Quindi MO^T è ortogonale a tutte le matrici antisimmetriche e dunque esiste $S \in S_n(\mathbb{R})$ tale che $MO^T = S$ ovvero $M = SO$.
La (16) diventa

$$(18) \qquad \mathrm{tr}(O^T S U) \le \mathrm{tr}(S) \quad \text{per ogni } U \in O_n(\mathbb{R})$$

che implica $S \in S_n^+(\mathbb{R})$.

$\square$

<u>Commento</u> Le matrici $O \in O_n(\mathbb{R})$ danno isometrie di $\mathbb{R}^n$ che, in particolare, conservano la misura di Lebesgue.
Le matrici $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ sono "gradienti" di mappe quadratiche convesse.

Decomposizione polare non-lineare

Il teorema di Brenier estende la decomposizione polare a campi vettoriali generali da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$.

Teorema Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme di Borel tale che $\mathcal{L}^n(A) = 1$ e consideriamo la misura $\mu = \mathcal{L}^n \llcorner A$.
Sia $F : A \to \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale tale che:

1) $F \in L^2(A; \mathbb{R}^n)$;
2) $F_{\#}\mu \ll \mathcal{L}^n$ (non degenerazione).

Allora esistono una funzione convessa $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ed una funzione di Borel $B : A \to A$ che preserva la misura, $B_{\#}\mu = \mu$, tali che

$$(19) \qquad F = \nabla\varphi \circ B.$$

Dim Per ipotesi $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$ ed inoltre la misura $\nu := F_{\#}\mu$ verifica

$$(20) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |y|^2 d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x)|^2 d\mu = \int_A |F(x)|^2 dx < \infty.$$

Quindi anche $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^n)$.
Siamo nelle ipotesi del Teorema di Brenier, Knott-Smith sia per la coppia (μ, ν) che (ν, μ).
Sia $T^{\mu,\nu} \in \mathcal{T}(\mu,\nu)$ la soluzione (unica) del problema di trasporto ottimo

$$(21) \qquad \min\left\{ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |x - Tx|^2 d\mu \; ; \; T \in \mathcal{T}(\mu,\nu) \right\}$$

Sappiamo che esiste $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ convessa tale che $T^{\mu,\nu} = \nabla\varphi$.

Sia poi $T^{\nu,\mu} \in \mathcal{T}(\mu,\nu)$ la soluzione del problema da ν a μ. Sappiamo che $T^{\mu,\nu} \circ T^{\nu,\mu} = Id$.

La mappa $B := T^{\nu,\mu} \circ F$ preserva la misura, $B_\# \mu = \mu$ ed inoltre

$$\nabla\varphi \circ B = T^{\mu,\nu} \circ T^{\nu\mu} \circ F = F.$$

$\square$

É facile verificare che la decomposizione $F = \nabla\varphi \circ B$ è unica.

<u>Commento.</u> La mappa B si può ottenere anche come proiezione di F sulle mappe che preservano μ.

Motivazione fluidodinamica di Brenier

Consideriamo un aperto limitato $A \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, con frontiera regolare (di classe C^1).

Dentro A si muove un fluido incomprimibile senza viscosità. Al tempo $t \in \mathbb{R}$ ed alla posizione $x \in A$, la velocità del fluido è il vettore

(1) $$v(t,x) \in \mathbb{R}^n.$$

Il moto del fluido è governato dal sistema di equazioni di Eulero. Con la notazione

(2) $$v \cdot \nabla v = (v \cdot \nabla) v = \left(\sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v_1}{\partial x_i}, \dots, \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v_n}{\partial x_i} \right)$$

il sistema di Eulero è

(3) $$\frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v = - \nabla p$$

dove $p = p(t,x)$ è la pressione del fluido al tempo t nel punto x. La condizione di incomprimibilità è

(4) $$\operatorname{div}(v(t,\cdot)) = 0.$$

Nei punti $x \in \partial A$ la velocità non può essere trasversale a ∂A e quindi si deve imporre la condizione al bordo

(5) $$\langle v(t,x), N_{\partial A}(x) \rangle = 0 \qquad x \in \partial A, \ t \in \mathbb{R}.$$

Al tempo $t=0$ la velocità è prescritta dalla condizione iniziale

(6) $$v(0,x) = v_0(x) \quad , \quad x \in A,$$

dove $v_0 : A \to \mathbb{R}^n$ è assegnata e verifica proprietà opportune, ad esempio $\operatorname{div}(v_0) = 0$.

Il problema analitico è di capire se ci sono soluzioni v, p e quale sia la loro regolarità. Nella pratica il sistema è studiato con tecniche di analisi numerica.

Se le soluzioni sono regolari allora l'energia cinetica totale si conserva.

<u>Proposizione.</u> Siano $v \in C^1(\mathbb{R}\times\bar{A};\mathbb{R}^n)$ e $p \in C^1(\mathbb{R}\times\bar{A})$ soluzioni di (3)-(4)-(5). Allora

(7) $$t \longmapsto \int_A |v(t,x)|^2 dx \text{ è costante}$$

Dim. Conti:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_A |v(t,x)|^2 dx = \int_A \langle v(t,x), \frac{\partial}{\partial t} v(t,x)\rangle dx \overset{(3)}{=}$$

(8)

$$= \int_A \langle v(t,x), -v\cdot\nabla v(x,t) - \nabla p(x,t)\rangle dx.$$

Portare la derivata dentro l'integrale è lecito e nell'ipotesi C^1 su $\bar{A}$ tutti gli integrali convergono.

Con il teorema della divergenza ora si calcola:

$$(9) \quad \int_A \langle v, \nabla p \rangle \, dx = \int_A \{ \operatorname{div}(p v) - p \underbrace{\operatorname{div}(v)}_{\overset{(4)}{=} 0} \} \, dx =$$

$$= \int_{\partial A} p \underbrace{\langle v, N_{\partial A} \rangle}_{\overset{(5)}{=} 0} \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 .$$

E analogamente:

$$\int_A \langle v, v \cdot \nabla v \rangle \, dx = \int_A \sum_{i=1}^{n} v_i \, (v \cdot \nabla) v_i \, dx =$$

$$(10) \quad = \int_A \sum_{i,j=1}^{n} v_i \, v_j \, \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = \frac{1}{2} \int_A \sum_{i,j=1}^{n} v_j \, \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_A \langle v, \nabla |v|^2 \rangle \, dx = \frac{1}{2} \int_A \{ \operatorname{div}(|v|^2 v) - |v|^2 \underbrace{\operatorname{div}(v)}_{= 0} \} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\partial A} |v|^2 \underbrace{\langle v, N_{\partial A} \rangle}_{= 0} \, d\mathcal{H}^{n-1} = 0 .$$

Questo conclude la prova di (7)

$\square$

In realtà i fisici (Onsager) pensano che ci sia una perdita di energia cinetica. Questo significa che le soluzioni (interessanti) non sono regolari.

3

Il sistema di equazioni differenziali (3) alle derivate parziali ("approccio Euleriano") può essere riformulato come un "sistema" di equazioni differenziali ordinarie che descrivono il moto delle "particelle" del fluido ("approccio Lagrangiano").

Sia $t \mapsto \gamma(t; x_0)$ la traiettoria della particella di fluido che al tempo $t=0$ si trova nel punto $x_0 \in A$. Dunque

(11) $$\begin{cases} v(t, \gamma(t;x_0)) = \dot\gamma(t;x_0) \\ \gamma(0;x_0) = x_0 . \end{cases}$$

Dunque, nella coordinata $i = 1, \dots, n$

$$\ddot\gamma_i(t;x_0) = \frac{d}{dt} v_i(t, \gamma(t, x_0))$$

(12) $$= \frac{\partial v_i}{\partial t}(t, \gamma(t;x_0)) + \langle \nabla v_i(t, \gamma(t;x_0)), \dot\gamma(t;x_0) \rangle$$

ovvero in notazione vettoriale

(13) $$\ddot\gamma(t;x_0) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, \gamma(t;x_0)) + (v \cdot \nabla) v\, (t, \gamma(t, x_0))$$

Ora capiamo che il membro di sinistra in (3) è una accellerazione.

Fissato il tempo t, possiamo introdurre il flusso $\Phi_t : A \to A$

(14) $$\Phi_t(x) = \gamma(t; x)$$

che risolve $\dot\Phi_t(x) = \dot\gamma(t; x) = v(t, \Phi_t(x))$, ovvero $v(t,x) = \dot{\Phi}_t(\Phi_t^{-1}(x))$, ben definita se Φ_t è invertibile. La (4) diventa $\mathrm{div}(\dot{\Phi}_t(\Phi_t^{-1}(x)))=0$.

In realtà sappiamo che

(15) $$\mathrm{div}(v(t,x))=0 \iff \det(J_x \Phi_t(x)) = 1,$$

ovvero i flussi conservano la misura di Lebesgue.

Dunque, $t \mapsto \Phi_t$ è una curva di (candidati) diffeomorfismi che conservano la misura di Lebesgue.

Arnold ha dato un'interpretazione "creativa" dell'equazione (13), che ricopiamo come

(16) $$\ddot{\gamma}(t;x_0) = -\nabla p(\gamma(t;x_0)).$$

Fissiamo lo spazio di Hilbert $H = L^2(A;\mathbb{R}^n)$ e consideriamo

(17) $$S(A) = \{ F \in H : F_{\#}(\mathcal{L}^n \llcorner A) = \mathcal{L}^n \llcorner A \}.$$

É un sottoinsieme chiuso di H (esercizio) che <u>NON</u> è convesso. S(A) contiene le trasformazioni che conservano la misura di Lebesgue. La curva $t \mapsto \gamma(t;\cdot) = \Phi_t$ è contenuta in S(A). La lunghezza di questa curva (meglio: la sua energia) può essere definita come (limitatamente ad un intervallo, diciamo $[0,1]$):

(18) $$L(\gamma) = \left(\int_0^1 \|\dot{\gamma}(t;\cdot)\|^2_{L^2(A)}\, dt \right)^{1/2}.$$

Supponiamo di sapere cosa sia lo spazio tangente a $S(A)$ in un punto $F \in S(A)$: $T_F S(A)$. Prendiamo una generica curva $t \to \varphi(t) \in H$ tale che $\varphi(t) \in T_{\gamma(t)} S(A)$.

Allora si ha

$$\gamma(t;\cdot) + \varepsilon\,\varphi(t;\cdot) + o(\varepsilon^2) \in S(A) \tag{19}$$

per un errore $o(\varepsilon^2)$ opportuno. Se γ è geodetica allora

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0} L(\gamma + \varepsilon\varphi + o(\varepsilon^2)), \tag{20}$$

ovvero, equivalentemente,

$$0 = \int_0^1 \int_A \langle \dot\gamma(t;x), \dot\varphi(t,x)\rangle \, dx\, dt. \tag{21}$$

Aggiungendo la richiesta $\varphi(0,x) = \varphi(1,x) = 0$ possiamo integrare per parti in t ed ottenere

$$0 = \int_0^1 \int_A \langle \ddot\gamma(t;x), \varphi(t,x)\rangle \, dx\, dt. \tag{22}$$

Questo significa che $\ddot\gamma(t;x)$ è ortogonale in $L^2(A;\mathbb{R}^n)$ a $T_{\gamma(t)} S(A)$. Cosa vuol dire in pratica?

Avremo

$$T_{\Phi_t} S(A) = \{ \dot\theta_0 \in H \;;\; \tau \mapsto \theta_\tau \in S(A),\ \theta_0 = \Phi_t \}. \tag{23}$$

Ma $\theta_\tau \circ \Phi_t \in S(A)$ per ogni τ e dunque

(24) $$\operatorname{div}\left(\dot{\theta}_\tau(\Phi_t)\right) = 0 \,,$$

In altri termini $T_{\Phi_t} S(A) = \{ h \in H : \operatorname{div}(h \circ \Phi_t) = 0 \}$.

Ritorniamo a $\ddot{\gamma}(t;\cdot) \in H = L^2(A;\mathbb{R}^n)$. Per il Teorema di decomposizione di Helmoltz

(25) $$\ddot{\gamma}(t;\cdot) = -\nabla p(t,\cdot) \overset{L^2\text{-ortog},}{+} v(t,\cdot) \,, \qquad \cdot = \gamma_t \equiv \Phi_t \,,$$

con $\operatorname{div}(v(t;\cdot)) = 0$ in senso distribuzionale.

Ma allora la condizione di ortogonalità (22) significa che

(26) $$\ddot{\gamma}(t;\gamma(t,x)) = -\nabla p(t;\gamma(t,x)) \,.$$

Questa è l'equazione per le geodetiche in $S(A)$.

Ecco l'idea di Arnold: L'equazione di Eulero ha un significato geometrico.

Purtroppo il discorso di Arnold è solo formale.

In generale, le geodetiche in $S(A)$ neppure esistono.

Brenier riparte da qui: risolve l'equazione di Eulero (16) in una "forma debole" costruendo geodetiche approssimate. Qui interviene la teoria del trasporto ottimo.

Vogliamo collegare $\Phi_0, \Phi_1 \in S(A)$ con una "geodetica approssimata". Se esiste, sia $\Phi_{1/2} \in S(A)$ il minimo

$$(27) \qquad \min \left\{ \|\Phi - \Phi_0\|^2_{L^2} + \|\Phi - \Phi_1\|^2_{L^2} \; : \; \Phi \in S(A) \right\}.$$

Questo equivale a minimizzare

$$(28) \qquad \frac{1}{2} \|\Phi_0 - \Phi_1\|^2_{L^2} + 2 \left\| \Phi - \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} \right\|^2_{L^2},$$

ovvero dobbiamo trovare l'elemento $\Phi \in S(A)$ con minima distanza da $\frac{1}{2}(\Phi_0 + \Phi_1)$. Per rendere la costruzione ben posta questo $\Phi_{1/2}$ dovrebbe essere unico per poi iterare, definire $\Phi_{1/4}$ e $\Phi_{3/4}$ ed al limite tutta una curva $t \mapsto \Phi_t$.

Il problema è che $S(A)$ non è convesso e l'unicità della "proiezione" sembra un problema grave.

Tuttavia:

<u>Teorema</u> Sia $F \in L^2(A; \mathbb{R}^n)$ tale che $F_\# \mathcal{L}^2 \llcorner A \ll \mathcal{L}^2 \llcorner A$. Allora il minimo

$$(29) \qquad \min \left\{ \int_A |F - S|^2 dx \; : \; S \in S(A) \right\} \quad (:= P)$$

viene raggiunto in modo unico e coincide con il minimo di Monge

$$(30) \qquad \min \left\{ \int_A |y - Ty|^2 d\nu \; ; \; T \in T(\nu, \mu) \right\} \quad (:= M)$$

con $\mu = \mathcal{L}^2 \llcorner A$ e $\nu = F_\# \mu$.

Dim. Il minimo di Monge esiste grazie all'ipotesi $\nu \ll \mathcal{L}^2 \llcorner A$.
Sia $T = T^{\nu,\mu}$ il minimo (unico) per il problema (30).
Allora $S = T \circ F$ verifica $S_\# \mu = T_\# F_\# \mu = T_\# \nu = \mu$,
ovvero $S \in S(A)$. Per la formula di cambio variabile:

$$\int_A |F - S|^2 \, d\mu = \int_A |F(x) - T(F(x))|^2 \, d\mu =$$

$$= \int_A |y - Ty|^2 \, d \underbrace{F_\# \mu}_{= \nu} = M.$$

Questo prova che $P \leq M$.

Ora consideriamo $\pi = (F \times S)_\# \mu$, per una generica
$S \in S(A)$. Avremo $\pi \in \Pi(\nu, \mu)$ e inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |y - x|^2 \, d\pi = \int_A |F(x) - S(x)|^2 \, dx .$$

Se $K = M$ è il minimo di Kantorovic, questo prova
che $K \leq P$. La conclusione è che $M = P$.
Omettiamo l'argomento sull'unicità.

$\square$