

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA

Il funzionale di Mumford-Shah

Un approccio variazionale alla segmentazione di immagini

Laureando:
Marco DE ZOTTI
Matricola: 1131011

Relatore:
Prof. Roberto MONTI

15 Dicembre 2017

Indice

Introduzione	iii
1 Il modello costante a tratti	1
1.1 Premessa	1
1.2 Alcune definizioni	2
1.3 Esistenza di una segmentazione 2-normale ottimale	9
1.4 Proprietà delle segmentazioni 2-normali e ottimali	14
2 Cenni di Teoria Geometrica della Misura	21
2.1 La distanza di Hausdorff e il teorema di Blaschke	21
2.2 Lemmi di Ricoprimento	22
2.3 Insiemi rettificabili e semplicemente rettificabili	22
2.4 Proprietà di semicontinuità della misura di Hausdorff	23
3 Il modello di Mumford-Shah generale	27
3.1 Premessa	27
3.2 Il funzionale di Mumford-Shah	27
3.3 Il metodo di Escissione	31
3.4 Ricoprimenti a piccola oscillazione	34
3.5 Stima dell'energia di escissione	34
3.6 Proprietà di una segmentazione ottimale	36
3.7 Esistenza di una segmentazione ottimale	42
Bibliografia	47

Introduzione

Vedere può essere inteso non solo come l'acquisizione di una "fotografia" bidimensionale di una determinata area, ma anche come l'interpretazione del suo contenuto. Quando si guarda un'immagine infatti si riconoscono delle strutture che il nostro cervello interpreta e riconosce. Le informazioni che arrivano alla nostra retina però non sono strutturate; la struttura viene data dal nostro cervello che elabora le informazioni locali che gli vengono trasmesse dall'occhio. Questo lavoro di tesi cerca di mostrare un'applicazione non banale di alcune moderne tecniche di analisi matematica applicate al problema del riconoscimento di immagini.

Dal punto di vista matematico un'immagine è una funzione $g(x)$ dove x è un punto del dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, che usualmente è un rettangolo o l'intero piano, e il valore $g(x)$ rappresenta le caratteristiche principali dell'immagine. Solitamente il valore $g(x)$ è un numero nell'intervallo $[0, 1]$ che rappresenta l'intensità di grigio di un determinato punto; nulla vieta però di considerare g come una funzione a valori vettoriali in un qualche sottoinsieme di \mathbb{R}^N : se $N = 3$ di solito le componenti indicano il livello di intensità dei colori fondamentali rosso (R), verde (G) e blu (B), dando luogo quindi alla codifica RGB del colore; per $N = 4$ le componenti di g indicano i livelli di ciano (C), magenta (M), giallo (Y) e nero (K) (codifica CMYK, usata in tipografia).

Questo dato senza alcuna struttura, la funzione g , è il punto di partenza dell'analisi di un'immagine ed è anche il dato che dalla retina viene inviato al nostro cervello.

Il problema della segmentazione di immagini è quello di passare da un dato non strutturato ad uno con struttura. *Segmentare* un'immagine significa trovare (per mezzo di un algoritmo numerico) le sue regioni omogenee e i suoi contorni: le prime infatti corrispondono alle parti significative dell'immagine.

Uno dei modelli analitici maggiormente studiati (e essenzialmente, anche il più semplice, ma già abbastanza significativo) è quello proposto da David B. Mumford e Jayant Shah in [11]. Si tratta, come suggerisce il titolo di questa tesi, di un modello variazionale che cerca di minimizzare un determinato funzionale energia definito su un insieme che specificheremo più avanti. Questa energia misura quanto "lisce" siano le regioni nelle quali viene suddivisa l'immagine e quanto fedeli siano l'immagine ottenuta e i suoi contorni rispetto all'immagine originale.

Possiamo allora specificare quale sia il problema proposto da Mumford e Shah: data un'immagine g si tratta di trovare simultaneamente una versione "liscia" dell'immagine u con un insieme K di discontinuità, i "contorni" di g . Allora la segmentazione migliore di una data immagine è ottenuta minimizzando il funzionale

$$(MS) \quad E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u(x)|^2 dx + \alpha \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \beta \mathcal{H}^1(K),$$

dove $\alpha, \beta > 0$ sono due parametri reali. Il primo termine fa sì che la norma di ∇u sia piccola fuori dai contorni e che quindi u sia liscia, il secondo termine che u approssimi g e il terzo

che l'insieme dei contorni K abbia lunghezza minima (e quindi, in un certo senso, sia il più regolare possibile). In realtà nel Capitolo 3 considereremo solo il caso in cui $\alpha = \beta = 1$: questa non è una limitazione in quanto è possibile ricondurre il Funzionale (MS) a questo caso con un riscaldamento, come spiegato ad esempio nel Remark 15 del Capitolo 2 di [4].

Quello che bisogna aspettarsi da un algoritmo che minimizza il funzionale di Mumford-Shah è una versione abbozzata dell'immagine, quasi una vignetta.

È naturale chiedersi se questo modello sia consistente, cioè se per qualsiasi immagine $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ esista una coppia (\bar{u}, \bar{K}) tale che

$$E(\bar{u}, \bar{K}) = \min_{(u, K)} E(u, K),$$

se essa sia unica e quale sia la regolarità dell'insieme K .

Per quanto riguarda la questione della regolarità, Mumford e Shah [10] hanno congetturato l'esistenza di segmentazioni minimali fatte di un insieme finito di curve \mathcal{C}^1 che si incontrano solo in alcune configurazioni particolari: ne vedremo un esempio in dettaglio per il modello costante a tratti nel Capitolo 1, in particolare nel Teorema 1.1.1. La congettura è ancora aperta.

Uno dei metodi per dimostrare l'esistenza di una segmentazione ottimale si basa sulla teoria delle funzioni *SBV* e sul relativo teorema di compattezza, dovuto a Luigi Ambrosio [2].

Seguiremo in questa tesi, invece, un approccio diverso basato sul lavoro di Jean-Michel Morel e di Sergio Solimini [9], *Variational Methods in Image Segmentation*; il primo capitolo presenterà il modello costante a tratti, un modello semplificato con il quale si riescono a ottenere già dei buoni risultati: supporremo che la u cercata sia costante sulle componenti connesse di $\Omega \setminus K$, così che il primo termine in (MS) sia nullo. Dopo aver introdotto nel secondo capitolo alcuni fatti riguardanti la Teoria Geometrica della Misura, tratteremo nell'ultimo capitolo il caso generale e dimostreremo il teorema sull'esistenza e sulle proprietà dei minimi per il Funzionale di Mumford-Shah.

Capitolo 1

Il modello costante a tratti

In questo capitolo analizziamo un primo modello per la segmentazione di immagini: il modello costante a tratti. Uno dei maggiori punti di forza di questo modello è che, nonostante esso si basi su argomentazioni di carattere elementare e su ipotesi molto restrittive (cercheremo una u costante sulle componenti connesse di $\Omega \setminus K$), riusciremo a dimostrare un teorema di esistenza della segmentazione ottimale e dedurremo alcune importanti proprietà di tali segmentazioni.

1.1 Premessa

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo chiuso e $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$ una funzione misurabile e limitata che rappresenterà la scala di grigio dell'immagine data. Il fatto che sia stato scelto come dominio dell'immagine un rettangolo non è realmente una restrizione e molte delle cose esposte in questo capitolo non dipenderanno dalla scelta fatta per Ω . Lo scopo dell'analisi dell'immagine è quello di trovare una partizione di Ω in un insieme finito di regioni dove g sia il più possibile costante e un'approssimazione u di g costante sulle componenti connesse della partizione trovata. Si cerca una coppia (u, K) tale che u approssimi al meglio la funzione g in norma $L^2(\Omega)$ e tale che l'insieme K , che rappresenta i contorni di g , abbia lunghezza minima e quindi sia il più regolare possibile. È utile allora formulare il nostro problema in maniera variazionale: la soluzione si otterrà minimizzando il funzionale

$$(1.1) \quad E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \lambda \text{lungh}(K),$$

dove K è l'unione delle frontiere delle regioni in Ω e $\text{lungh}(K)$ è la sua lunghezza totale. Il parametro reale $\lambda > 0$, chiamato *parametro di scala*, regola la quantità di "contorni" presenti nella segmentazione finale: se λ è grande, il termine $\text{lungh}(K)$ peserà molto nella minimizzazione di $E(u, K)$ e si otterrà una segmentazione più grossolana.

Lo scopo di questo capitolo è quello di provare il seguente teorema:

Teorema 1.1.1. Sia g una funzione misurabile e limitata, definita su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Allora esiste una coppia (\bar{u}, \bar{K}) tale che

$$E(\bar{u}, \bar{K}) = \min_{(u, K)} E(u, K).$$

Inoltre i punti regolari di \bar{K} sono di classe $C^{1,1}$ e hanno curvatura limitata da $8\sqrt{2} \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}$ mentre i punti singolari sono di due tipi: o sono *punti tripli* dove tre rami di \bar{K} si incontrano con un angolo di 120° , oppure sono *punti di frontiera* dove \bar{K} interseca $\partial\Omega$ con un angolo di 90° .

Nel resto del capitolo daremo un senso preciso alle affermazioni formulate qui solo in maniera intuitiva.

1.2 Alcune definizioni

Prima di tutto è necessario definire il concetto di *segmentazione*. Un approccio potrebbe essere quello di cercare K tra tutti i sottoinsiemi compatti di Ω ; per ora però ci restringiamo a un particolare tipo di compatti: l'unione di un numero finito di supporti di curve rettificabili.

Segmentazioni e lunghezza

Definizione 1.2.1 (Segmentazione). Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Una *segmentazione* K di Ω è l'unione di un numero finito di curve rettificabili tutte contenute in Ω , cioè K è una segmentazione di Ω se esistono $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n : [0, 1] \rightarrow \Omega$ curve rettificabili tali che

$$K = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j([0, 1]).$$

Le $\alpha \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ componenti connesse di $\Omega \setminus K$ verranno denotate con $(O_i)_{i=1, \dots, \alpha}$ e sono dette *regioni* della segmentazione. Denotiamo al solito con ∂O_i la frontiera topologica di O_i e con $\partial(O_i, O_j) := \partial O_i \cap \partial O_j$ la frontiera comune a due regioni.

Definizione 1.2.2. Sia K una segmentazione 1-normale. Due regioni O e O' sono dette *adiacenti* se $\ell(\partial(O, O')) > 0$.

È possibile allora rendere precisa la definizione di lunghezza di una segmentazione che ci serve per definire il Funzionale (1.1)

Definizione 1.2.3 (Lunghezza di una segmentazione). Sia K una segmentazione di Ω . La *lunghezza* di K è

$$\text{lungh}(K) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \ell(c_k) \mid K = \bigcup_{k=1}^{\infty} c_k([0, 1]), c_1, c_2, \dots \text{ curve rettificabili} \right\}$$

dove $\ell(c_k)$ è l'usuale lunghezza della curva c_k .

Osservazione 1.2.4. La precedente definizione è stata data per far sì che non si contino più volte eventuali tratti comuni di più curve. È facile vedere, per esempio, che se K è l'unione di un insieme di curve che si incontrano solo in un insieme numerabile di punti, allora $\text{lungh}(K)$ è esattamente la somma delle lunghezze delle curve.

Il funzionale di Mumford-Shah

Possiamo allora formulare in maniera più precisa il problema di minimizzazione del funzionale di Mumford-Shah. Sia

$$X = \{(u, K) \mid K \text{ è segmentazione di } \Omega, u \text{ costante su } \Omega \setminus K\}.$$

Abbiamo dato un senso preciso al secondo termine del Funzionale (1.1)

$$E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \lambda \text{lungh}(K).$$

Il problema diventa quello di trovare una coppia (\bar{u}, \bar{K}) tale che

$$E(\bar{u}, \bar{K}) = \min_{(u, K) \in X} E(u, K).$$

Grazie al seguente lemma riusciamo in realtà a far sì che il Funzionale (1.1) non dipenda da u .

Lemma 1.2.5. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile con $0 < \mathcal{L}^n(A) < +\infty$ e sia $g \in L^2(A)$. Allora la costante $t \in \mathbb{R}$ che minimizza

$$I(t) := \int_A (t - g(x))^2 dx$$

è la media di g su A , cioè

$$t = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A g(x) dx.$$

Dimostrazione. Innanzitutto notiamo che $I(t) < +\infty$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ in quanto $g \in L^2(A)$. Dobbiamo trovare quindi un valore $t \in \mathbb{R}$ che minimizzi $I(t) = \int_A (t^2 - 2tg(x) + g(x)^2) dx$. Calcoliamone la derivata e cerchiamo i punti critici:

$$I'(t) = 2t \mathcal{L}^n(A) - 2 \int_A g(x) dx$$

e quindi

$$I'(t) = 0 \iff t = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)} \int_A g(x) dx.$$

Il punto trovato è un minimo in quanto $t \mapsto I(t)$ è una funzione convessa, con $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} I(t) = +\infty$. \square

Dunque se fissiamo la segmentazione K , la corrispondente u che minimizza il Funzionale (1.1) è completamente definita dal fatto che il suo valore su ogni componente connessa di $\Omega \setminus K$ sia pari alla media di g sulla componente connessa stessa. Denotiamo con $|O|$ la misura di Lebesgue $\mathcal{L}^2(O)$ e con u_O il valore di u ristretta alla regione O , che per il Lemma 1.2.5 è

$$u_O = \frac{1}{|O|} \int_O g(t) dt.$$

Allora si ha che

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\alpha} u_{O_i} \chi_{O_i}(x).$$

Quindi il funzionale $E(u, K)$ dipende in realtà solo dalla segmentazione K ; pertanto d'ora in poi sarà denotato con $E(K)$.

Segmentazioni 1- e 2-normali

Consideriamo ora un sottoinsieme dell'insieme delle segmentazioni, sul quale poi effettivamente andremo a trovare il minimo. Ricordiamo innanzitutto la seguente definizione

Definizione 1.2.6 (Curva di Jordan). Una curva γ è detta di Jordan se è continua e iniettiva su $]0, 1[$. Se $\gamma(0) = \gamma(1)$ la curva è detta *chiusa* mentre se $\gamma(0) \neq \gamma(1)$ è detta *aperta* e i due punti sono detti *estremi*.

Possiamo allora dare la definizione di 1-normalità e 2-normalità per segmentazioni. Lavorando all'interno di queste classe di segmentazioni, avremo la garanzia che il numero di curve della segmentazione sarà limitato da una costante che non dipende dalla segmentazione: questo sarà utile per utilizzare il teorema di Ascoli-Arzelà sull'insieme delle segmentazioni dove cercheremo il minimo di $E(K)$.

Definizione 1.2.7 (Segmentazione 1-normale). Una segmentazione $K = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j([0, 1])$ è detta *1-normale* se valgono le seguenti proprietà:

- $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ sono curve rettificabili di Jordan;
- Per ogni $i \neq j$ $\gamma_i(t) = \gamma_j(s)$ solo se $t, s \in \{0, 1\}$, cioè due curve si incontrano solo agli estremi;
- $\gamma_i(t) \in \partial\Omega$ solo se $t \in \{0, 1\}$, cioè una curva interseca $\partial\Omega$ solo agli estremi;
- Ogni curva separa due regioni diverse;
- Ogni estremo interno è un estremo comune ad almeno tre curve.

Chiamiamo *crossing points* i punti di K dove almeno tre curve hanno un estremo comune o dove una delle curve di K incontra $\partial\Omega$.

Esempio 1.2.8. In Figura 1.1 a sinistra rappresentiamo un esempio di una segmentazione 1-normale, mentre a destra una segmentazione non 1-normale: i due elementi della segmentazione, presi singolarmente, sono due esempi di curve "non ammesse".

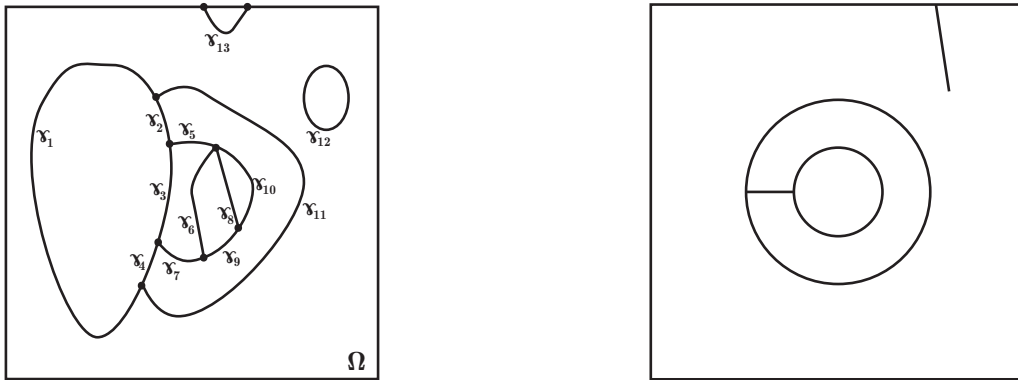


Figura 1.1: Esempi di segmentazioni 1-normali e non 1-normali.

Possiamo allora presentare due lemmi che ci serviranno per mostrare che il numero di curve in cui può essere scomposta una segmentazione e il numero di crossing points dipendono (e sono limitati) dal numero di regioni della stessa. Procederemo in maniera un po' informale nella dimostrazione di questi due lemmi, utilizzando alcune proprietà topologiche di \mathbb{R}^2 che sono intuitive. Le dimostrazioni di questi due lemmi possono essere formalizzate utilizzando il Lemma della Curva di Jordan [1, Sez. 2.3].

Definizione 1.2.9. Siano A e B due sottoinsiemi \mathbb{R}^2 . Diremo che A è *delimitato* da B se è contenuto in una componente connessa limitata di $\mathbb{R}^2 \setminus B$.

Lemma 1.2.10. Sia $K = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i([0, 1])$ una segmentazione 1-normale con α regioni. Allora

$$K = \bigcup_{j=1}^{\alpha-1} c_j([0, 1]),$$

dove le (c_j) sono curve di Jordan che si intersecano in un insieme finito di punti. Sia inoltre r il numero di crossing points di K ; valgono allora le seguenti stime su n e r :

$$(1.2) \quad r \leq 2 \cdot (\alpha - 1)$$

e

$$(1.3) \quad n \leq 3 \cdot (\alpha - 1) - 2.$$

Dimostrazione. Mostriamo che è possibile ridurre il numero di regioni di K a $\alpha - 1$ rimuovendo una curva di Jordan dall'insieme K senza perdere la 1-normalità. Allora, siccome il numero di regioni α è finito, dopo $\alpha - 2$ iterazioni di questo procedimento, saranno rimaste due regioni e quindi una curva di Jordan che è anche una segmentazione 1-normale. Questo dimostra il Lemma.

Dimostriamo allora l'affermazione fatta: consideriamo due regioni adiacenti O_i e O_j , cioè tali che $\ell(\partial(O_i, O_j)) > 0$. Se $\partial(O_i, O_j)$ è connesso, è una curva di Jordan e possiamo rimuoverla; la segmentazione resta 1-normale. Altrimenti, se $\partial(O_i, O_j)$ non è connesso, $O_i \cup O_j$ delimita almeno una regione O_k tale che $\ell(\partial(O_i, O_k)) > 0$, vedi Figura 1.2. Alle regioni O_i e O_k è possibile riapplicare il ragionamento appena fatto.

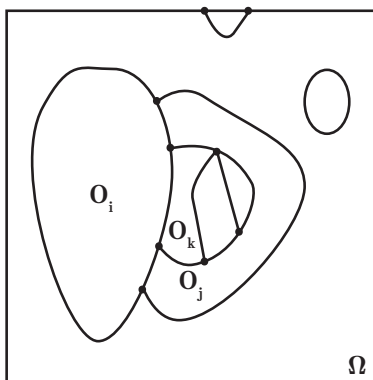


Figura 1.2: O_i e O_j racchiudono altre regioni.

Vediamo come ottenere le stime su n e su r ; ripercorriamo la dimostrazione, soffermando l'attenzione su come dipendano tali valori da α . Consideriamo i crossing points: per ogni curva rimossa nel procedimento sopra descritto ce ne sono al più 2; siccome le curve in tutto sono $\alpha - 1$, si ha subito allora la (1.2). Concentriamoci ora sul numero n di curve che definiscono la segmentazione. Se $\partial(O_i, O_j)$ è una curva di Jordan chiusa, la rimozione contribuisce ad abbassare n di una unità. Se $\partial(O_i, O_j)$ è una curva di Jordan aperta allora ci sono due crossing points (le estremità della curva); se uno di questi è punto di intersezione di più di tre curve di K , le altre curve non vengono toccate dal procedimento sopra descritto, mentre se ci sono esattamente tre curve di K che si incontrano nel punto, quando $\partial(O_i, O_j)$ viene rimosso, le altre curve devono essere considerate come un'unica curva. Quindi n cala al più di tre unità per ogni curva rimossa e si ottiene la (1.3). \square

Passiamo adesso a definire le segmentazioni 2-normali:

Definizione 1.2.11 (Segmentazione 2-normale). Una segmentazione 1-normale K è detta *2-normale* se per ogni coppia di regioni adiacenti O_i e O_j la segmentazione $K' = K \setminus \partial(O_i, O_j)$ verifica $E(K') \geq E(K)$.

Nella definizione di 2-normalità K' è la segmentazione ottenuta fondendo assieme le regioni O_i e O_j e rimuovendo il tratto di frontiera comune, come si può vedere in Figura 1.3.

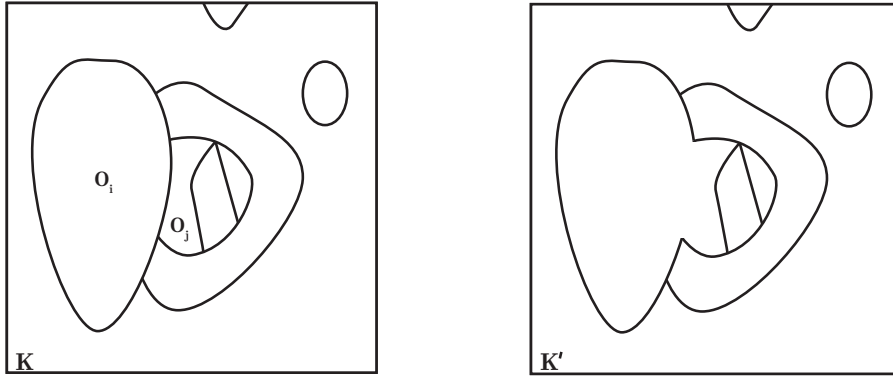


Figura 1.3: L'operazione di fondere assieme due regioni della definizione di 2-normalità.

Osservazione 1.2.12. Minimizzare il funzionale di Mumford-Shah solo tra le segmentazioni 2-normali non è una limitazione: infatti se una segmentazione ha energia minima, deve essere 2-normale dato che l'operazione di fondere assieme due regioni non può diminuire ulteriormente l'energia (che è minima).

Per le segmentazioni 2-normali è possibile provare la seguente stima

Teorema 1.2.13. Sia K una segmentazione 2-normale con α regioni. Allora

$$\alpha \leq \frac{288|\Omega| \operatorname{osc}(g)^4}{C^2 \lambda^2},$$

dove C è la costante isoperimetrica in Ω , cioè la costante tale che $\ell(\partial O \cap \Omega) \geq C \cdot \sqrt{|O|}$.

Prima di procedere alla dimostrazione sono necessari due lemmi.

Lemma 1.2.14. Sia K una segmentazione 2-normale. Allora per ogni coppia di regioni O e O' vale

$$\ell(\partial(O, O')) \leq \frac{\operatorname{osc}(g)^2}{\lambda} \cdot \min(|O|, |O'|).$$

Dimostrazione. Se $\ell(\partial(O, O')) = 0$ non c'è nulla da dimostrare. Supponiamo allora che $\ell(\partial(O, O')) > 0$, cioè che le due regioni siano adiacenti. Allora, posto $K' = K \setminus \partial(O, O')$ si ha che

$$\begin{aligned} 0 &\leq E(K') - E(K) \\ &= \int_{\Omega \setminus K'} (u(x) - g(x))^2 dx + \lambda \operatorname{lungh}(K') - \int_{\Omega \setminus K} (u(x) - g(x))^2 dx - \lambda \operatorname{lungh}(K) \\ &= \int_{O \cup O'} (u_{O \cup O'} - g(x))^2 dx - \int_O (u_O - g(x))^2 dx - \int_{O'} (u_{O'} - g(x))^2 dx - \lambda \ell(\partial(O, O')), \end{aligned}$$

dove ricordiamo che, dal Lemma 1.2.5, per ogni $A \subset \Omega$,

$$u_A := u|_A = \frac{1}{|A|} \int_A g(t) dt.$$

Allora otteniamo che

$$\begin{aligned} \lambda \ell(\partial(O, O')) &\leq \int_{O \cup O'} (u_{O \cup O'} - g(x))^2 dx - \int_O (u_O - g(x))^2 dx - \int_{O'} (u_{O'} - g(x))^2 dx \\ &= \int_O (u_{O \cup O'} - g)^2 - (u_O - g)^2 dx + \int_{O'} (u_{O \cup O'} - g)^2 - (u_{O'} - g)^2 dx. \end{aligned}$$

Affermo ora che

$$(1.4) \quad \int_{O \cup O'} (u_{O \cup O'} - g)^2 dx \leq \int_{O \cup O'} (u_{O'} - g)^2 dx.$$

Dunque si ha che

$$\int_O (u_{O \cup O'} - g)^2 dx + \int_{O'} (u_{O \cup O'} - g)^2 dx - \int_{O'} (u_{O'} - g)^2 dx \leq \int_O (u_{O'} - g)^2 dx$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \lambda \ell(\partial(O, O')) &\leq \int_O (u_{O'} - g)^2 dx - \int_O (u_O - g)^2 dx \\ &\leq \int_O (u_{O'} - g)^2 dx. \end{aligned}$$

Ma ora, esplicitando la definizione di $u_{O'}$, abbiamo che

$$u_{O'} - g(x) = \frac{1}{|O'|} \int_{O'} g(t) dt - g(x) = \frac{1}{|O'|} \int_{O'} g(t) dt - \frac{1}{|O'|} \int_{O'} g(x) dt \leq \text{osc}(g)$$

e quindi otteniamo $\lambda \ell(\partial(O, O')) \leq |O| \text{osc}(g)^2$. Analogamente si prova che $\lambda \ell(\partial(O, O')) \leq |O'| \text{osc}(g)^2$ e quindi

$$\lambda \ell(\partial(O, O')) \leq \min(|O|, |O'|) \text{osc}(g)^2.$$

Resta da dimostrare l'affermazione (1.4): sviluppando i due quadrati dobbiamo provare che

$$\int_{O \cup O'} [u_{O'}^2 - 2u_{O'} g(x) - u_{O \cup O'}^2 + 2u_{O \cup O'} g(x)] dx \geq 0,$$

cioè che

$$\begin{aligned} 0 &\leq |O \cup O'| u_{O'}^2 - 2u_{O'} \int_{O \cup O'} g(x) dx - |O \cup O'| u_{O \cup O'}^2 + 2u_{O \cup O'} \int_{O \cup O'} g(x) dx \\ &= |O \cup O'| u_{O'}^2 - 2|O \cup O'| u_{O'} u_{O \cup O'} - |O \cup O'| u_{O \cup O'}^2 + 2|O \cup O'| u_{O \cup O'} u_{O \cup O'} \\ &= |O \cup O'| (u_{O \cup O'} - u_{O'})^2, \end{aligned}$$

che è banalmente vero. □

Lemma 1.2.15. Sia K una segmentazione 2-normale e per ogni regione O sia $N(O)$ il numero di regioni adiacenti a O . Allora

$$N(O) \geq \frac{C\lambda}{\sqrt{|O|} \text{osc}(g)^2}.$$

Dimostrazione. Siano $(O_j)_{j=1}^{N(O)}$ le regioni adiacenti a O . Dalla 2-normalità di K e dal lemma precedente si ha che $\lambda \partial(O, O_j) \leq |O| \operatorname{osc}(g)^2$. Allora, siccome $\partial O = \bigcup_{j=1}^{N(O)} \partial(O, O_j)$,

$$\lambda \ell(\partial O) = \lambda \sum_{j=1}^{N(O)} \ell(\partial(O, O_j)) \leq N(O) |O| \operatorname{osc}(g)^2.$$

Si conclude applicando la disuguaglianza isoperimetrica relativa all'insieme Ω . \square

Possiamo allora dimostrare il Teorema 1.2.13.

Dimostrazione (Teorema 1.2.13). Siccome $\Omega \setminus K = \bigcup_{i=1}^{\alpha} O_i$ e le varie regioni sono disgiunte, si ha che $\sum_i |O_i| = |\Omega \setminus K| = |\Omega|$. Consideriamo l'insieme

$$I = \left\{ i \in \{1, \dots, \alpha\} \mid |O_i| \leq \frac{2}{\alpha} |\Omega| \right\}.$$

Si ha che

$$|\Omega| = \sum_{i=1}^{\alpha} |O_i| \leq \sum_{i \in I} |O_i| \leq \frac{2}{\alpha} |\Omega| \operatorname{Card}(I)$$

e quindi $\operatorname{Card}(I) \geq \frac{\alpha}{2}$. Per ogni $j \in I$, applicando il risultato del Lemma 1.2.15, si ha che

$$N(O_j) \geq \frac{C \lambda}{\sqrt{|O_j|} \operatorname{osc}(g)^2} \geq C \lambda \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2|\Omega|}} \cdot \frac{1}{\operatorname{osc}(g)^2}.$$

Quindi il numero di coppie di regioni adiacenti, e quindi il numero di curve n della segmentazione è

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\alpha} N(O_i) \geq \frac{1}{2} \sum_{i \in I} N(O_i) \geq \frac{C \lambda}{2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2|\Omega|}} \cdot \frac{1}{\operatorname{osc}(g)^2} \cdot \operatorname{Card}(I) \\ &\geq \frac{\alpha}{4} C \lambda \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{2|\Omega|}} \cdot \frac{1}{\operatorname{osc}(g)^2} = 2^{\frac{5}{2}} C \lambda \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{|\Omega|}} \cdot \frac{1}{\operatorname{osc}(g)^2}. \end{aligned}$$

Ma dal Lemma 1.2.10 si ha che $n \leq 3(\alpha - 1) - 2 \leq 3\alpha$, quindi $2^{\frac{5}{2}} C \lambda \frac{\alpha^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{|\Omega|}} \cdot \frac{1}{\operatorname{osc}(g)^2} \leq 3\alpha$. Esplicitando α da questa disuguaglianza si ottiene la relazione cercata. \square

Corollario 1.2.16. Sia $K = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i([0, 1])$ una segmentazione 2-normale. Allora il numero di curve n è limitato da una costante che dipende solo da Ω , da g e da λ .

Dimostrazione. Combinando i risultati del Lemma 1.2.10 e del Teorema 1.2.13 abbiamo che

$$n \leq 3\alpha - 5 \leq 3\alpha \leq 3 \cdot \frac{288|\Omega| \operatorname{osc}(g)^4}{C^2 \lambda^2} = \frac{864|\Omega| \operatorname{osc}(g)^4}{C^2 \lambda^2},$$

ottenendo così la stima cercata. \square

Osservazione 1.2.17. Il corollario precedente ci garantisce che, se $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione di segmentazioni 2-normali in Ω , cioè per ogni $m \in \mathbb{N}$, $K_m = \bigcup_{i=1}^{n_m} \gamma_i^m([0, 1])$, il numero n_m di curve della segmentazione m -esima è uniformemente limitato da una costante che non dipende da m . Possiamo allora supporre che n_m sia costante in m , cioè che le varie segmentazioni abbiano tutte lo stesso numero di curve.

1.3 Esistenza di una segmentazione 2-normale ottimale

Passiamo allora a dimostrare il teorema di esistenza per il minimo del Funzionale (1.1)

$$E(K) = \int_{\Omega} (u - g)^2 dx + \lambda \text{lung}(K)$$

all'interno della classe delle segmentazioni 2-normali.

Specifichiamo innanzitutto qual è la nozione di convergenza di una successione di segmentazioni.

Definizione 1.3.1. Sia $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di segmentazioni. Diremo che K_m converge a una segmentazione K se $K_m = \bigcup_{i=1}^{n_m} \gamma_i^m([0, 1])$, per ogni $i \in \mathbb{N}$ la curva γ_i^m converge uniformemente per $m \rightarrow \infty$ ad una qualche curva γ_i e $K = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i([0, 1])$.

Il teorema di esistenza

L'idea per dimostrare l'esistenza di un minimo per il funzionale $E(K)$ è quella tipica del Metodo Diretto del Calcolo delle Variazioni: il teorema di Weierstrass ci garantisce che se X è uno spazio topologico, $F : X \rightarrow]-\infty, \infty]$ è un funzionale (sequenzialmente) semicontinuo inferiore e $K \subset X$ è un insieme (sequenzialmente) compatto, allora F ha minimo in K . Per dimostrare l'esistenza di una segmentazione ottimale è sufficiente quindi dimostrare la (sequenziale) semicontinuità del funzionale $E(K)$ e la (sequenziale) compattezza dell'insieme delle segmentazioni 2-normali.

Teorema 1.3.2. Per ogni successione $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ di segmentazioni 2-normali esiste una sottosuccessione che converge a una segmentazione K tale che

$$E(K) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(K_m).$$

Dimostrazione. Sia $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di segmentazioni 2-normali.

Mostriamo innanzitutto che esiste una segmentazione K (non necessariamente 2-normale) tale che un'opportuna sottosuccessione di $K_m = \bigcup_{i=1}^{n_m} \gamma_i^m([0, 1])$ converge a K .

Considero la successione $(\gamma_1^m)_{m \in \mathbb{N}}$: è una successione di curve lipschitziane di lunghezza uniformemente limitata. Allora per il teorema di Ascoli-Arzelà esiste una sottosuccessione che converge uniformemente ad una curva; per non appesantire la notazione chiameremo questa sottosuccessione ancora (γ_1^m) . Lungo questa sottosuccessione considero ora $(\gamma_2^m)_{m \in \mathbb{N}}$: per lo stesso motivo esiste un'ulteriore sottosuccessione uniformemente convergente; lungo questa considero $(\gamma_3^m)_{m \in \mathbb{N}}$. Procedendo in questo modo, siccome il numero di curve di K_m è uniformemente limitato e grazie all'Osservazione 1.2.17, è possibile trovare una sottosuccessione lungo la quale tutte le successioni di curve $(\gamma_1^m)_{m \in \mathbb{N}}, (\gamma_2^m)_{m \in \mathbb{N}}, \dots, (\gamma_n^m)_{m \in \mathbb{N}}$ convergono uniformemente a delle curve $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$. Definisco $K = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j([0, 1])$; allora esiste una sottosuccessione della successione di segmentazioni $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ che converge a K .

Notiamo ora che la successione $(u^m)_{m \in \mathbb{N}}$ è automaticamente definita da $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$: infatti, se $(O_i^m)_{i=1, \dots, \alpha}$ sono le α regioni della segmentazione, la funzione u^m è costante a tratti e

definita da

$$u^m(x) = \sum_{i=1}^{\alpha} u_{O_i}^m \chi_{O_i^m}(x),$$

dove $u_{O_i}^m$ è una costante pari alla media di g sull'aperto O_i^m . Siano inoltre $(O_i)_{i=1,\dots,\alpha}$ le componenti connesse di $\Omega \setminus K$.

Dobbiamo mostrare che vale la semicontinuità inferiore per il funzionale E , cioè che

$$E(K) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(K_m).$$

Iniziamo con la parte integrale di E : per conseguire il nostro scopo vorremmo poter applicare il Lemma di Fatou [6, Teorema 1.17] alla successione di funzioni $((u^m(x) - g(x))^2)_{m \in \mathbb{N}}$. Ci serve provare allora la convergenza puntuale quasi ovunque di $(u^m(x))_{m \in \mathbb{N}}$.

Sia $x \in O_i$. Siccome O_i è aperto, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset\subset O_i$. Eventualmente rinumerando le curve della segmentazione, è possibile supporre che sia

$$\partial O_i = \bigcup_{k=1}^{N(O_i)} \gamma_k([0, 1]).$$

Dal fatto che le curve $(\gamma_k)_{k \in \{1, \dots, N(O_i)\}}$ convergono uniformemente, è possibile trovare un $M \in \mathbb{N}$ tale che per $m \geq M$ e per ogni $k \in \{1, \dots, N(O_i)\}$

$$\sup_{t \in [0, 1]} |\gamma_k(t) - \gamma_k^m(t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dunque si ha che $\text{dist}(x, \partial O_i^m) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ per $m \geq M$: infatti

$$\text{dist}(x, \partial O_i^m) = \inf_{\substack{t \in [0, 1] \\ k \in \{1, \dots, N(O_i)\}}} |x - \gamma_k^m(t)|,$$

ma per ogni $t \in [0, 1]$ e $k \in \{1, \dots, N(O_i)\}$

$$|x - \gamma_k^m(t)| \geq \left| |x - \gamma_k(t)| - |\gamma_k(t) - \gamma_k^m(t)| \right| \geq \left| \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} \right| = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora per $m \geq M$ $x \in O_i^m$ e definitivamente $u^m(x) = u_{O_i}^m$; quindi la successione $(u^m(x))_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali che vale definitivamente $\frac{1}{|O_i^m|} \int_{O_i^m} g(\xi) d\xi$. Inoltre è una successione limitata, in quanto g lo è; dal teorema di Bolzano-Weierstrass sappiamo allora che esiste una sottosuccessione convergente, che chiameremo ancora $(u^m(x))_{m \in \mathbb{N}}$. Allora pongo $u(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u^m(x)$. Ora, con un'argomentazione simile è possibile dimostrare che u è costante: presi x e y in O_i si mostra che x e y stanno in O_i^m definitivamente, ma $u_i^m(x) = u_i^m(y)$ e l'uguaglianza passa al limite.

La semicontinuità inferiore del secondo termine invece deriva dall'analogia proprietà della lunghezza delle curve. Se γ^m converge puntualmente a γ allora

$$\ell(\gamma) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \ell(\gamma^m).$$

Infatti, fissata una partizione $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_N \leq 1$

$$\sum_{i=1}^N |\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})| = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N |\gamma^m(t_i) - \gamma^m(t_{i-1})| \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \ell(\gamma^m).$$

Quest'ultimo termine non dipende dalla partizione; la disuguaglianza cercata si ottiene allora prendendo il sup sulle partizioni dell'intervallo $[0, 1]$. \square

È utile fare la seguente precisazione.

Osservazione 1.3.3. I concetti di 2-normalità e ottimalità per il funzionale di Mumford-Shah non sono equivalenti. Infatti se Ω è connesso la segmentazione vuota è una segmentazione 2-normale per ogni scelta del parametro di scala $\lambda > 0$ nel Funzionale (1.1). Dal Teorema 1.2.13, per valori del parametro λ molto grandi, la segmentazione vuota è anche la segmentazione ottimale, dato che il numero α di regioni è zero; per valori piccoli di λ , al contrario, questo potrebbe non essere vero.

D'ora in poi denotiamo con \mathcal{K} l'insieme delle segmentazioni 2-normali. Possiamo dimostrare allora il teorema di esistenza.

Teorema 1.3.4. Esiste una segmentazione $\bar{K} \in \mathcal{K}$ tale che

$$E(\bar{K}) = \min_{H \in \mathcal{K}} E(H).$$

Dimostrazione. Sia

$$L = \inf_{H \in \mathcal{K}} E(H).$$

Dalla definizione di estremo inferiore esiste una successione di segmentazioni 2-normali $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tale che $E(K_m)$ converge a L .

Dal Teorema 1.3.2 sappiamo che esiste una segmentazione K (potrebbe anche non essere 2-normale) tale che K_m converge a K e tale che

$$E(K) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(K_m).$$

Se K è 2-normale, allora certamente $L \leq E(K)$ e quindi si ha la seguente catena di disuguaglianze:

$$L \leq E(K) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(K_m) = L.$$

Il teorema è dimostrato con $\bar{K} = K$.

Se K non è 2-normale, allora esiste una coppia di regioni adiacenti O_i e O_j tale che $K' = K \setminus \partial(O_i, O_j)$ verifica $E(K') \leq E(K) \leq L$. Ora, se K' è 2-normale, abbiamo trovato una segmentazione 2-normale ottimale, altrimenti proseguiamo con questo procedimento. Siccome il numero di curve di una segmentazione 2-normale è limitato da una costante universale, questo procedimento termina fornendoci una segmentazione \bar{K} che realizza il minimo. \square

Dimostriamo ora una proprietà interessante della segmentazione K ottenuta con il processo di limite descritto nella dimostrazione del Teorema 1.3.2: passando al limite, il numero di crossing point della segmentazione non aumenta.

Ripercorrendo la dimostrazione del teorema capiamo che è possibile ridurci a considerare una successione K_m di segmentazioni 2-normali con le seguenti proprietà:

- (a) $K_m = \bigcup_{j=1}^n \gamma_j^m([0, 1])$ è costituita da un numero costante di curve di Jordan $(\gamma_j^m)_m$ definite su $]0, 1[$ a valori in Ω . Gli estremi di queste curve sono un insieme finito di punti che chiameremo $(a_i^m)_m$ e sono i crossing points di K_m . Essi possono essere interni oppure appartenere a $\partial\Omega$;
- (b) Ogni successione $(a_i^m)_m$ converge a un punto a_i in $\bar{\Omega}$;
- (c) Ogni successione di curve $(\gamma_j^m)_m$ converge uniformemente a una curva rettificabile γ_j ;

- (d) La successione $E(K_m)$ tende al valore $\min_{H \in \mathcal{K}} E(H)$, dove \mathcal{K} è l'insieme delle segmentazioni 2-normali.

Allora la segmentazione limite K è definita come l'unione dei supporti delle curve γ_j . Dimostriamo il seguente teorema.

Teorema 1.3.5. Sia $(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di segmentazioni 2-normali con le proprietà (a)-(d) e sia K la segmentazione limite. Allora gli unici crossing points di K sono gli $(a_i)_i$.

Dimostrazione. Presentiamo innanzitutto l'idea della dimostrazione; dimostreremo i dettagli in seguito. Procediamo per assurdo: supponiamo che le curve soddisfino le proprietà (a)-(d) e che, al limite, K abbia un nuovo crossing point a ; supponiamo per semplicità che a sia in Ω . Fissiamo un parametro $\varepsilon > 0$ tale che $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$; modificheremo la segmentazione K in K' all'interno di D , palla di centro a e raggio ε in maniera tale che K' soddisfi $E(K') \leq E(K) + C\varepsilon^2$, dove C denota qualche costante. Da K' sarà ora possibile trovare, modificandola opportunamente, un'altra segmentazione K'' che faccia calare drasticamente l'energia, cioè tale che $E(K') - E(K'') \geq 2\varepsilon$. Questo porta a un assurdo perché si avrebbe che $E(K'') \leq E(K') - 2\varepsilon \leq E(K) + C\varepsilon^2 - 2\varepsilon$ e il termine $C\varepsilon^2 - 2\varepsilon$ è negativo per come abbiamo scelto ε . In realtà mostreremo solo che, con le modifiche che andremo a effettuare, faremo diminuire il termine di lunghezza di ordine ε : il conto che faremo mostrerà infatti che qualunque sia la modifica di K all'interno di D , questa influisce solo di ordine ε^2 nella parte integrale e quindi può essere trascurata.

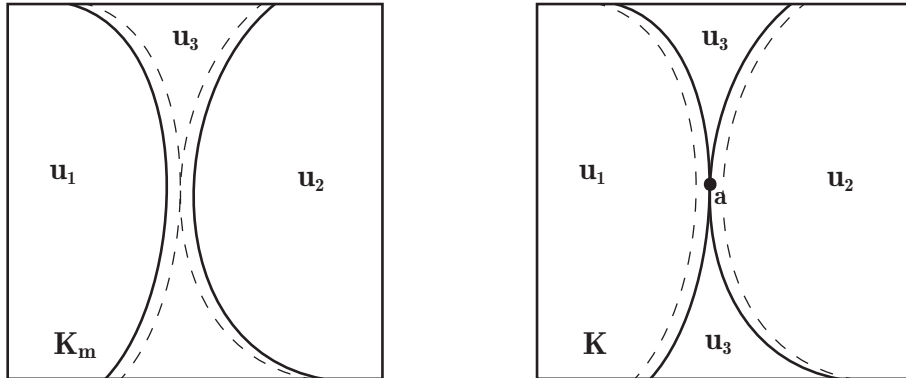


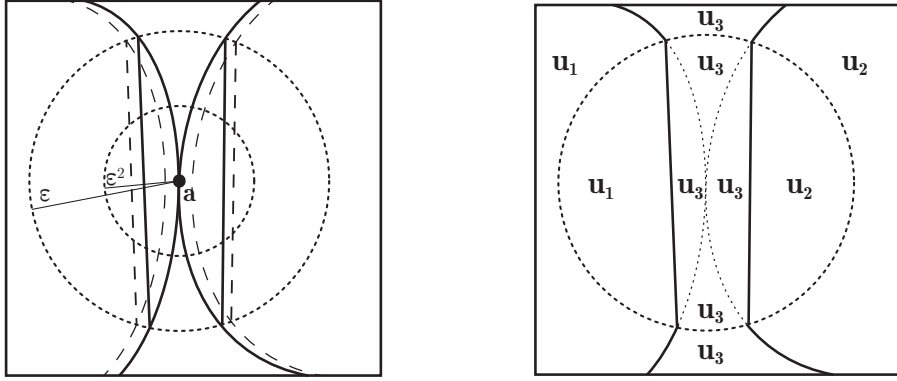
Figura 1.4: La successione (K_m) e il suo limite K .

È possibile prendere $\varepsilon \leq \min_i |a - a_i|$, in maniera da garantirci che tutte le modifiche che faremo non vadano ad intaccare gli altri crossing points, e che $m \in \mathbb{N}$ sia abbastanza grande da avere

$$E(K_m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(K_n) + \tilde{c}\varepsilon^2, \quad |a_i^m - a^i| \leq \varepsilon^2 \quad \text{e} \quad \|\gamma_j^m - \gamma_j\|_\infty \leq \varepsilon^2,$$

dove \tilde{c} è una costante arbitraria fissata.

Consideriamo ora tutti i pezzi di curve di K contenuti in D e sostituiamoli con delle curve affini; un esempio è mostrato in Figura 1.5. Con questo procedimento le componenti connesse di $\Omega \setminus K$ non vengono modificate al di fuori di D e la lunghezza delle curve diminuisce. Allo stesso modo operiamo su K_m . Chiamiamo i segmenti aggiunti da questo procedimento c_j^m e c^m e le nuove segmentazioni K'_m e K' ; questo procedimento modifica le u all'interno di D semplicemente assegnandogli il valore nella corrispondente componente connessa; si faccia riferimento sempre a Figura 1.5.

Figura 1.5: La segmentazione K' .

Notiamo che siccome le curve γ_j^m convergono uniformemente alle γ_j , anche c_j^m converge uniformemente a c^m , cioè K'_m converge a K' .

Inoltre abbiamo aumentato l'energia al più di ordine ε^2 , cioè $E(K') \leq E(K) + C\varepsilon^2$ per qualche costante C . Infatti innanzitutto abbiamo che $\ell(K') \leq \ell(K)$. Per confrontare la parte integrale di E , indichiamo con u_K e $u_{K'}$ i valori delle u relative a K e K' . Allora, siccome u_K e $u_{K'}$ sono funzioni costanti a tratti e queste costanti sono la media di g su qualche regione:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (u_K - g)^2 dx - \int_{\Omega} (u_{K'} - g)^2 dx \right| &= \left| \int_D (u_K - g)^2 dx - \int_D (u_{K'} - g)^2 dx \right| \\ &\leq \int_D (u_K - g)^2 dx + \int_D (u_{K'} - g)^2 dx \leq 2 \operatorname{osc}(g)^2 |D| = 2 \operatorname{osc}(g)^2 \pi \varepsilon^2 =: C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

Con un conto analogo si mostra anche che qualunque sia la modifica di K all'interno di D , questa influisce solo di ordine ε^2 nella parte integrale di E .

Ora, siccome a è un crossing point, esistono due curve di K_m che passano a distanza minore di ε^2 da a . Senza perdita di generalità siano esse γ_1^m e γ_2^m . Siano $u^m, v^m, x^m, y^m, u, v, x$ e y le intersezioni di c_1^m, c_2^m, c_1 e c_2 con ∂D , cioè $c_1^m = [u^m, v^m], c_2^m = [x^m, y^m], c_1 = [u, v]$ e $c_2 = [x, y]$.

Il nostro scopo è mostrare che le curve c_1 e c_2 hanno lunghezza di ordine 2ε : ci basta farlo vedere per le curve c_1^m e c_2^m perché poi esse convergono uniformemente a c_1 e c_2 .

Iniziamo stimando la lunghezza di γ_1^m dentro D (per γ_2^m vale un risultato analogo). Sia D' il disco di raggio ε^2 centrato in a e sia $p \in \operatorname{supp}(\gamma) \cap D'$. Dalla disuguaglianza triangolare si ha che $|x - a| \leq |x - p| + |p - a|$ e $|y - a| \leq |y - p| + |p - a|$. Quindi

$$\ell(\gamma|_D) \geq |y - p| + |p - x| \geq |y - a| - |a - p| + |x - a| - |a - p| \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2.$$

Quando le curve vengono sostituite da curve affini, con il procedimento sopra esposto, la loro lunghezza non può calare più di $C\varepsilon^2$. Infatti se fosse che $E(K_m) - E(K'_m) \geq C\varepsilon^2$ si avrebbe che

$$E(K'_m) \leq E(K_m) - C\varepsilon^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(K_n) + \tilde{c}\varepsilon^2 - C\varepsilon^2.$$

Quindi, con la scelta di $\tilde{c} = C/2$ si avrebbe che

$$E(K'_m) \leq \inf_{H \in \mathcal{K}} E(H) - \frac{C}{2}\varepsilon^2,$$

che è assurdo.

È possibile quindi stimare la lunghezza di c_1^m : dal fatto che $E(K_m) - E(K'_m) \leq C\varepsilon^2$ si ottiene che $\ell(\gamma_1^m) - \ell(c_1^m) \leq \tilde{c}_1\varepsilon^2$ e quindi $\ell(c_1^m) \geq \ell(\gamma_1^m) - \tilde{c}_1\varepsilon^2 \geq 2\varepsilon - 2\varepsilon^2 - \tilde{c}_1\varepsilon^2 = 2\varepsilon - (2 + \tilde{c}_1)\varepsilon^2$. Questa disuguaglianza, assieme al fatto che $\ell(c_1^m) \leq 2\varepsilon$ (perché una corda in una circonferenza ha sempre lunghezza minore del diametro), ci mostra che c_1^m e quindi c_1 sono quasi diametri di D . Ripetendo gli stessi ragionamenti per la curva c_2 , si ottiene la stessa conclusione.

Quindi, eventualmente scambiando u e v , si ha che le distanze $|u - x|$ e $|v - y|$ sono di ordine ε^2 . Il passaggio alla segmentazione K'' si fa dunque aggiungendo i segmenti $[u, x]$

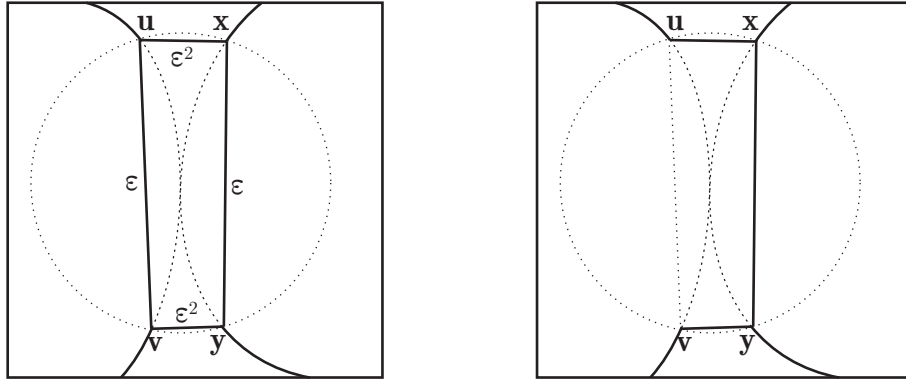


Figura 1.6: La segmentazione K'' .

e $[v, y]$ e rimuovendo uno dei segmenti $[u, v]$ oppure $[x, y]$: abbiamo ridotto di ordine 2ε la lunghezza della segmentazione e questo porta all'assurdo spiegato prima. \square

Osservazione 1.3.6. Si potrebbe mostrare che il fatto che nella segmentazione limite K non compaiano nuovi crossing points è equivalente al fatto che essa stessa sia 2-normale, ma questo non è necessario ai fini della dimostrazione del teorema di esistenza (Teorema 1.3.4).

È quindi dimostrata la prima parte del Teorema 1.1.1.

1.4 Proprietà delle segmentazioni 2-normali e ottimali

Deduciamo ora alcune proprietà delle segmentazioni 2-normali e delle segmentazioni ottimali che ci permetteranno di dimostrare anche la seconda parte del Teorema 1.1.1.

Iniziamo presentando due proprietà generali delle segmentazioni 2-normali (che quindi saranno proprietà anche dalle segmentazioni ottimali).

Proposizione 1.4.1. Sia K una segmentazione 2-normale di Ω . Allora per ogni regione O , esiste una costante positiva C_1 che dipende solo da g , da Ω e da λ tale che

$$|O| \geq C_1(\text{osc}(g), \lambda, \Omega).$$

Dimostrazione. Fissata una regione O , dal Lemma 1.2.15 abbiamo che $N(O) \geq \frac{C\lambda}{\sqrt{|O|\text{osc}(g)^2}}$, ma ovviamente $N(O) \leq \alpha$. Allora, applicando il Teorema 1.2.13, si ha la seguente disuguaglianza

$$\frac{288|\Omega|\text{osc}(g)^4}{C^2\lambda^2} \geq \frac{C\lambda}{\sqrt{|O|\text{osc}(g)^2}},$$

che fornisce la stima cercata su $|O|$. \square

Questo ci dice che considerando solo segmentazioni 2-normali, tralasciamo automaticamente le regioni di misura piccola. Quindi un algoritmo che ricerca il minimo di E tra le segmentazioni 2-normali tenderà a eliminare le regioni dell'immagine che sono troppo piccole.

Si dimostra in maniera analoga anche la seguente stima, che garantisce che le regioni di una segmentazione 2-normale non sono troppo allungate e irregolari: è una sorta di disuguaglianza isoperimetrica inversa.

Proposizione 1.4.2. Sia K una segmentazione 2-normale di Ω . Allora per ogni regione O esiste una costante positiva C_2 che dipende solo da g , da Ω e da λ tale che

$$\ell(\partial O) \leq C_2(\text{osc}(g), \lambda, \Omega) \sqrt{|O|}.$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione del Lemma 1.2.15 è stata ottenuta la disuguaglianza

$$\lambda \ell(\partial O) \leq N(O) |O| \text{osc}(g)^2.$$

Ma $N(O) \leq \alpha$ e dal Teorema 1.2.13

$$\lambda \ell(\partial O) \leq \frac{288|\Omega| \text{osc}(g)^6}{C^2 \lambda^2} |O|.$$

Ora scrivendo $|O| = \sqrt{|O|} \sqrt{|O|}$ e utilizzando il fatto che $\sqrt{|O|} \leq \sqrt{|\Omega|}$, si ha la disuguaglianza cercata. \square

Passiamo ora a dimostrare una proprietà delle curve delle segmentazioni ottimali per il Funzionale (1.1): la loro curvatura è limitata.

Proposizione 1.4.3. Sia K una segmentazione 2-normale ottimale. Allora le curve di Jordan di K sono due volte differenziabili quasi ovunque e hanno curvatura limitata da $8\sqrt{2} \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}$.

Dimostrazione. Sia $\gamma(s)$ la parametrizzazione in lunghezza d'arco di una delle curve di Jordan della segmentazione. Supponiamo che γ sia definita in un intervallo simmetrico del tipo $[-L/2, L/2]$. Allora la lunghezza della curva tra il punto $\gamma(-s)$ e il punto $\gamma(s)$ è pari a $2s$ e $|\gamma(s) - \gamma(-s)| \leq 2s$, con l'uguaglianza solo se γ nell'intervallo $[-s, s]$ è affine. Poniamo allora $|\gamma(s) - \gamma(-s)| = 2(s - \varepsilon)$ con $\varepsilon \geq 0$: cercheremo una maggiorazione per ε . Ora tutti i punti $\gamma(r)$ con $r \in [-s, s]$ sono contenuti nell'ellisse definita dalla relazione $|\gamma(s) - z| + |z - \gamma(-s)| = 2s$ per $z \in \Omega$: infatti la lunghezza totale di γ è $2s$. L'ellisse infine è contenuta in un rettangolo di lati $2s$ e $2\sqrt{s^2 - (s - \varepsilon)^2} = 2\sqrt{2s\varepsilon - \varepsilon^2}$, la cui area è limitata quindi da $4s\sqrt{2s\varepsilon}$.

Utilizziamo ora l'ottimalità della segmentazione: modificando la segmentazione all'interno del rettangolo, l'energia E non può diminuire.

Sostituiamo in K il tratto di curva $\gamma(\tau)$ per $\tau \in [-s, s]$ con il segmento $[\gamma(-s), \gamma(s)]$ e modifichiamo il valore di u all'interno del rettangolo. Questa modifica di K diminuisce il valore della lunghezza di $\lambda\varepsilon$ e aumenta il termine integrale di E di non più dell'area del rettangolo moltiplicata per $\text{osc}(g)^2$. Ma siccome la segmentazione è ottimale, deve essere $\lambda\varepsilon \leq 4s\sqrt{2s\varepsilon} \text{osc}(g)^2$ e quindi $\varepsilon \leq 32s^3 \frac{\text{osc}(g)^4}{\lambda^2}$.

Consideriamo ora due incrementi successivi di γ , $v_1 = \gamma(0) - \gamma(-s)$ e $v_2 = \gamma(s) - \gamma(0)$. Vogliamo stimare la differenza di questi due incrementi perché questo ci darà una stima della curvatura di γ in 0. Usando la regola del parallelogramma $|v_1 - v_2|^2 = 2(|v_1|^2 + |v_2|^2) - |v_1 + v_2|^2$, il fatto che $|v_1|$ e $|v_2|$ sono limitati da s e che $|\gamma(s) - \gamma(-s)| = 2(s - \varepsilon)$ si ottiene che

$$|v_1 - v_2|^2 \leq 2s^2 + 2s^2 - 4(s - \varepsilon)^2 \leq 4s\varepsilon \leq 32 \times 4s^4 \frac{\text{osc}(g)^4}{\lambda^2}$$

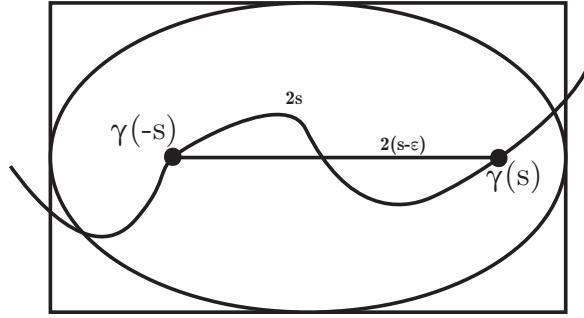


Figura 1.7: La stima della curvatura di K .

e quindi

$$|v_1 - v_2| \leq 8\sqrt{2}s^2 \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}.$$

Vogliamo ora ottenere una stima da sopra per la derivata seconda di γ . Dal teorema di Rademacher [6, Teorema 3.2], γ è differenziabile quasi ovunque perché lipschitziana. Considero allora due punti a e b di differenziabilità. Suddividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n intervallini uguali di vertici s_i , per $i = 1, \dots, n$. Sia ora $w_i = \frac{n}{b-a}(\gamma(s_i) - \gamma(s_{i-1}))$. Usando la stima precedente con $s = \frac{b-a}{n}$ otteniamo che

$$|w_i - w_{i-1}| \leq 8\sqrt{2} \frac{b-a}{n} \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}.$$

Siccome dalla disuguaglianza triangolare $|w_1 - w_n| \leq |w_1 - w_2| + |w_2 - w_3| + \dots + |w_{n-1} - w_n|$, si ha che

$$|w_1 - w_n| \leq 8\sqrt{2}(b-a) \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}$$

e, facendo tendere n a infinito,

$$|\dot{\gamma}(a) - \dot{\gamma}(b)| \leq 8\sqrt{2}(b-a) \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}$$

Dunque $\dot{\gamma}$ è lipschitziana e quindi continua. È quindi definita ovunque e con una costante di Lipschitz minore di $8\sqrt{2} \frac{\text{osc}(g)^2}{\lambda}$. Allora, di nuovo dal teorema di Rademacher, $\ddot{\gamma}$ è definita quasi ovunque e con valore assoluto limitato da questa costante; ma il modulo della derivata seconda di una curva parametrizzata con la lunghezza d'arco, in un punto, è la curvatura della curva nel punto stesso. \square

Possiamo completare la dimostrazione del Teorema 1.1.1. Resta da dimostrare la seguente proposizione.

Proposizione 1.4.4. Sia K una segmentazione 2-normale ottimale. I punti singolari di K sono di due tipi: o sono *punti tripli* dove tre curve di K si incontrano con un angolo di 120° , oppure sono *punti di frontiera* dove K interseca $\partial\Omega$ con un angolo di 90° .

Dimostrazione. Utilizzeremo, nei due casi un'idea generale: data K segmentazione ottimale, ci focalizziamo sui suoi punti singolari. Essi saranno di due tipi: o punti di frontiera oppure punti interni. Supponiamo per assurdo che uno di questi violi le proprietà della tesi della

proposizione e consideriamo $\varepsilon^2 \ll \varepsilon$. A questo punto modifichiamo K in K' in un intorno del punto in maniera tale da far diminuire la lunghezza almeno di ordine ε , cioè $\text{lung}(K) - \text{lung}(K') \geq C_1\varepsilon$, e da far aumentare il termine integrale $I(K) = \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx$ al più di ordine ε^2 , ossia $I(K') - I(K) \leq C_2\varepsilon^2$. Allora

$$E(K) = I(K) + \lambda \text{lung}(K) \geq I(K') - C_2\varepsilon^2 + \lambda \text{lung}(K') + C_1\varepsilon = E(K') + C_1\varepsilon - C_2\varepsilon^2$$

e $C_1\varepsilon - C_2\varepsilon^2 \geq 0$ per come abbiamo scelto ε . Essendo questo impossibile dall'ottimalità della segmentazione, abbiamo l'assurdo.

Descriviamo ora il procedimento di modifica di K nei due casi.

Consideriamo innanzitutto il caso di un punto interno al dominio Ω : supponiamo che più di tre curve di K si incontrino in un punto a o che esse siano esattamente tre, però con un angolo diverso da 120° . Allora due di queste curve si incontreranno certamente con un angolo (tra le tangenti) nel punto a minore di 120° ; sia esso β .

Sia D il disco di centro a e raggio ε , siano u e v la prima intersezione delle due curve con ∂D e sia w l'unico punto tale che i segmenti $[w, u]$, $[w, v]$ e $[w, a]$ formino un angolo di 120° . Tale punto esiste, è unico, e può essere determinato così: dati i tre punti u , v ed a costruiamo tre triangoli equilateri utilizzando per lati i segmenti $[u, v]$, $[v, a]$ e $[a, u]$ e costruiamo le circonferenze passanti per i tre punti di ciascun triangolo equilatero. Il punto w è il punto di intersezione delle tre circonferenze.

Modifichiamo K nel seguente modo: togliamo i pezzi di curva che connettono a ad u e v e aggiungiamo i tre segmenti sopra menzionati. Modifichiamo u all'interno di D semplicemente assegnando i valori sulle rispettive componenti connesse: siano u e \bar{u} i valori di u prima e dopo la modifica.

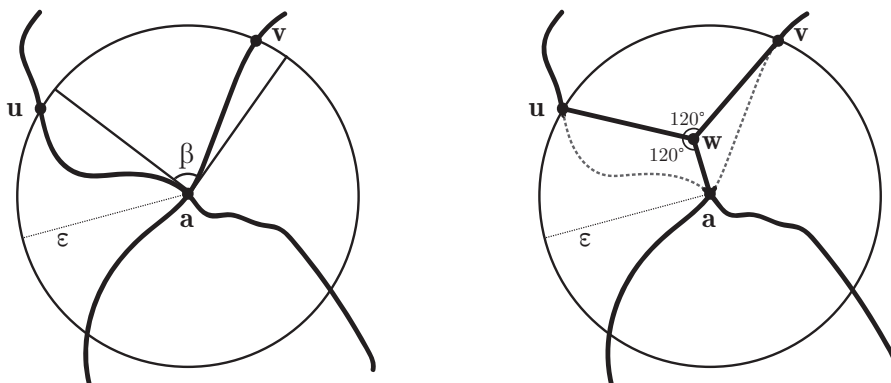


Figura 1.8: La modifica di K citata nella dimostrazione nel caso di un punto interno.

Innanzitutto è possibile scegliere ε piccolo abbastanza da garantire che l'angolo α tra i segmenti $[a, u]$ e $[a, v]$ sia minore di 120° : infatti $\beta < 120^\circ$ e le curve sono di classe \mathcal{C}^1 .

Dobbiamo mostrare che la lunghezza della segmentazione diminuisce almeno di ordine ε e che il termine integrale aumenta al più di ordine ε^2 .

È possibile vedere (Esempio 1.4.5) che

$$\ell([u, w]) = \ell([v, w]) = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e che

$$\ell([a, w]) = \varepsilon \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Allora, siccome $\ell((a, u)) \geq \ell([a, u]) = \varepsilon$ e una stima simile vale per $\ell((a, v))$,

$$\begin{aligned} \ell((a, u)) + \ell((a, v)) - \ell([u, w]) - \ell([v, w]) - \ell([a, w]) &\geq 2\varepsilon - \sqrt{3} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\ &= \left(2 - 2 \cos\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right) \varepsilon =: C(\alpha)\varepsilon, \end{aligned}$$

dove $C(\alpha)$ è una costante positiva in quanto $\alpha < 120^\circ$.

Stimiamo ora la differenza nei termini integrali. Siccome i valori di u e \bar{u} sono gli stessi al di fuori di D e qualunque essi siano, sono la media di g in una qualche regione, si ha che

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus K'} (\bar{u} - g)^2 dx - \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx &= \int_D (\bar{u} - g)^2 dx - \int_D (u - g)^2 dx \leq \text{osc}(g)^2 |D| \\ &= \pi \text{osc}(g)^2 \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso di un punto di frontiera: sia a il punto di intersezione tra K e $\partial\Omega$ e supponiamo per assurdo che la curva della segmentazione intersechi $\partial\Omega$ con un angolo inferiore di 90° , cioè che l'angolo α tra la sua tangente e $\partial\Omega$ sia inferiore a 90° .

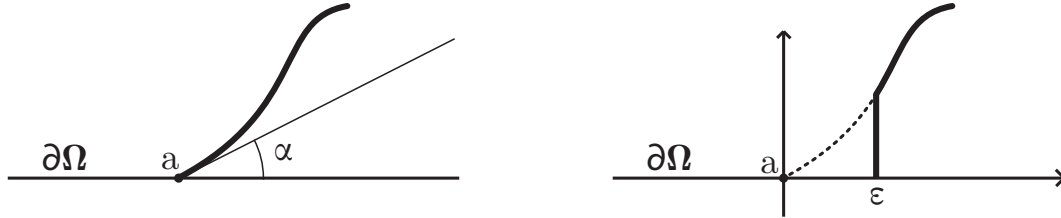


Figura 1.9: La modifica di K citata nella dimostrazione nel caso di un punto di frontiera.

Possiamo fissare un sistema di riferimento cartesiano centrato nel punto a e tale che il primo asse coordinato sia parallelo a $\partial\Omega$. Allora è possibile immaginare la curva come il grafico di una funzione $f : [0, 2\varepsilon] \rightarrow \mathbb{R}$, cioè $\gamma(t) = (t, f(t))$ per $t \in [0, 2\varepsilon]$ e dunque $\tan(\alpha) = f'(0)$, che a meno di una simmetria è possibile supporre positivo. Quindi, eventualmente scegliendo un ε più piccolo è possibile supporre che f sia crescente nell'intervallo $[0, \varepsilon]$.

La modifica di K consiste nel rimuovere il tratto di curva da $a = (0, 0)$ a $(\varepsilon, f(\varepsilon))$ e aggiungere il segmento che congiunge $(\varepsilon, f(\varepsilon))$ a $(\varepsilon, 0)$.

Mostriamo che la lunghezza della segmentazione diminuisce almeno di ordine ε : si tratta di mostrare che la differenza

$$\int_0^\varepsilon \sqrt{1 + f'(t)^2} dt - f(\varepsilon) =: G(\varepsilon) \geq C\varepsilon$$

per ogni $\varepsilon > 0$ e per qualche $C > 0$. Questo è equivalente a far vedere allora, dividendo per ε e considerando il limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, che $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} G(\varepsilon)/\varepsilon \geq C > 0$, ma in virtù del fatto che f è di classe \mathcal{C}^1 ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon} = \sqrt{1 + f'(0)^2} - f'(0) = \sqrt{1 + \tan^2(\alpha)} - \tan(\alpha).$$

Ora, siccome $0 \leq \alpha < 90^\circ$, possiamo supporre che $\alpha = 90^\circ - \delta$ per $0 < \delta \leq 90^\circ$. Allora $\tan(\alpha) = 1/\tan(\delta)$ e poiché $\tan(\delta) > 0$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{G(\varepsilon)}{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1 + \tan^2(\delta)}{\tan^2(\delta)}} - \frac{1}{\tan(\delta)} = \frac{1}{\tan(\delta)} \left(\sqrt{1 + \tan^2(\delta)} - 1 \right) =: C(\delta) > 0.$$

Per quanto riguarda il termine integrale, analogamente a ciò che è stato fatto con il primo caso, basta maggiorare l'area della regione dove u viene modificata, cioè l'area sotto al grafico della funzione f nell'intervallo $[0, \varepsilon]$. Ora, poiché f è crescente e di classe \mathcal{C}^1 , per la formula di Taylor abbiamo che

$$\int_0^\varepsilon f(x) dx \leq \varepsilon f(\varepsilon) = \varepsilon(f(0) + f'(0)\varepsilon + o(\varepsilon)) = \tan(\alpha)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$

che dimostra la stima cercata. \square

Esempio 1.4.5. In questo esempio diamo un'idea di come si possa calcolare, con metodi elementari, le lunghezze dei tratti $[u, w]$, $[v, w]$ e $[w, a]$ della dimostrazione precedente, alla quale rimandiamo per le notazioni.

Siccome i segmenti $[u, a]$ e $[v, a]$ sono raggi del disco D , $\ell([u, a]) = \ell([v, a]) = \varepsilon$. Il triangolo avente per vertici i punti u, v e a è quindi isoscele e possiamo supporre, a meno di una rotazione, di essere nel caso simmetrico (Figura 1.10). Sia p il punto medio del segmento $[u, v]$. Allora $\ell([u, p]) = \varepsilon \sin(\frac{\alpha}{2})$ e $\ell([a, p]) = \varepsilon \cos(\frac{\alpha}{2})$.

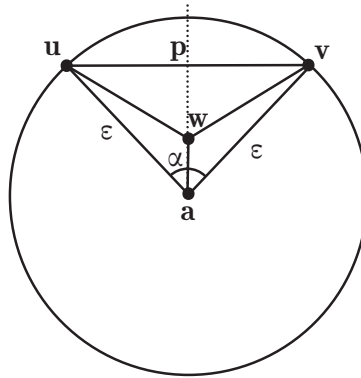


Figura 1.10: La configurazione simmetrica dell'esempio.

Sia $X = \ell([w, a])$ e $Y = \ell([u, w]) = \ell([v, w])$. Siccome l'angolo (convesso) tra $[u, w]$ e $[w, a]$ è di 120° , dal teorema dei coseni abbiamo che

$$\varepsilon^2 = X^2 + Y^2 - 2XY \cos(120^\circ) = X^2 + Y^2 + XY.$$

Ora, siccome il triangolo che ha per vertici u, p e w è un triangolo rettangolo con un angolo di 60° , abbiamo che $Y = \ell([u, w]) = 2\ell([p, w])$ e quindi

$$Y = 2 \left(\varepsilon \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - X \right).$$

Pertanto si deve risolvere la seguente equazione

$$X^2 - 2X\varepsilon \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \frac{2}{3}\varepsilon^2 \cos(\alpha) = 0.$$

Imponendo che X e Y siano numeri positivi, si trova che

$$X = \varepsilon \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

e che

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}\varepsilon \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Capitolo 2

Cenni di Teoria Geometrica della Misura

Richiamiamo in questo capitolo alcune definizioni e alcuni teoremi senza dimostrazione di Teoria Geometrica della Misura che serviranno per provare l'esistenza di un minimo del funzionale di Mumford-Shah e le sue relative proprietà.

Innanzitutto è necessario definire una distanza tra due insiemi: la scelta corretta quando si vogliono le proprietà di semicontinuità di alcuni funzionali di tipo geometrico, come quello in esame, è quella della *distanza di Hausdorff*.

2.1 La distanza di Hausdorff e il teorema di Blaschke

Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $A \subset X$ un sottoinsieme. Per $x \in X$, la distanza di x dall'insieme A è definita come

$$\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Dato un numero $\varepsilon > 0$ definiamo l' ε -intorno di A come

$$[A]_\varepsilon = \{x \in X \mid \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}.$$

Definizione 2.1.1 (Distanza di Hausdorff). Sia $\mathcal{K} = \{K \subset X \mid K \neq \emptyset \text{ è compatto}\}$. Definiamo *distanza di Hausdorff* la funzione $d_H : \mathcal{K} \times \mathcal{K} \rightarrow [0, +\infty)$

$$d_H(K, L) = \inf\{\varepsilon > 0 : K \subset [L]_\varepsilon, L \subset [K]_\varepsilon\}$$

per $K, L \in \mathcal{K}$.

È possibile mostrare che (\mathcal{K}, d_H) è effettivamente uno spazio metrico che è compatto se X è compatto.

Teorema 2.1.2 (Teorema di Blaschke). Siano (X, d) uno spazio metrico e $K \subset X$ compatto. Sia $\mathcal{F} = \{H \subset K \mid H \neq \emptyset \text{ è compatto}\}$. Allora ogni successione in \mathcal{F} ha una sottosuccessione che converge ad un elemento di \mathcal{F} rispetto alla distanza d_H .

Dimostrazione. È il Teorema 3.16 di [7]. □

2.2 Lemmi di Ricoprimento

È necessario ricordare ora alcuni lemmi di ricoprimento che verranno usati poi nelle dimostrazioni delle proprietà (di densità, concentrazione e proiezione) di una segmentazione ottimale. Richiamiamo innanzitutto un fatto di Teoria Geometrica della Misura, noto in letteratura anche come *5r-covering lemma*.

Lemma 2.2.1. Sia X uno spazio metrico e sia \mathcal{B} una collezione di sottoinsiemi di X tale che

$$\sup_{B \in \mathcal{B}} \text{diam } B < +\infty.$$

Allora esiste un sottoinsieme $\mathcal{B}' \subset \mathcal{B}$ di insiemi disgiunti tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$ esiste $B' \in \mathcal{B}'$ tale che $B \subset [B']_{2 \text{ diam } B}$.

Dimostrazione. Per la dimostrazione rimandiamo al Lemma 7.1 di [9]. □

Osservazione 2.2.2. Se $B = B(x, r)$ è una palla aperta di \mathbb{R}^N , l'insieme $[B]_{2 \text{ diam } B}$ è la palla $B(x, 5r)$. Questo spiega allora il nome *5r-covering lemma*.

Definiamo ora il concetto di ricoprimento di Vitali.

Definizione 2.2.3 (Ricoprimento di Vitali). Sia A un insieme e sia \mathcal{A} un suo ricoprimento. Diciamo che \mathcal{A} è un *ricoprimento di Vitali* se per ogni $x \in A$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un insieme $B \in \mathcal{A}$ tale che $x \in B$ e $\text{diam } B \leq \varepsilon$.

I ricoprimenti di Vitali sono un oggetto matematico importante quando si vogliono studiare le proprietà degli insiemi misurabili rispetto alla misura di Hausdorff. Infatti un ricoprimento di Vitali di un insieme A \mathcal{H}^α -misurabile contiene, per ogni $x \in A$, delle "finestre" arbitrariamente piccole attorno a x . Per il Lemma di Ricoprimento di Vitali [9, Lemma 7.14], è possibile pensare inoltre che tali ricoprimenti siano fatti di insiemi disgiunti.

Consideriamo ora una generalizzazione del concetto di ricoprimento di Vitali: esso sarà alla base della definizione di uniforme concentrazione per una successione di insiemi. È utile ricordare che molte proprietà che possono essere dimostrate per i primi, valgono anche per il seguente concetto.

Definizione 2.2.4. Diciamo che una famiglia di insiemi \mathcal{B} è un *ricoprimento di Vitali approssimato* di A se esiste un ricoprimento di Vitali \mathcal{B}' e un numero $\varepsilon > 0$ tali che per ogni $B' \in \mathcal{B}'$ esiste $B \in \mathcal{B}$ tale che $B \subset B'$ e

$$\text{diam } B \geq \varepsilon \text{ diam } B'.$$

Notiamo che un ricoprimento di Vitali approssimato di un insieme non è un ricoprimento di quell'insieme.

2.3 Insiemi rettificabili e semplicemente rettificabili

D'ora in poi α denota un numero intero positivo. Chiamiamo α -insieme ogni sottoinsieme di uno spazio metrico \mathcal{H}^α -misurabile di misura finita. Definiamo innanzitutto il concetto di rettificabilità.

Definizione 2.3.1 (Superficie α -rettificabile). Diciamo *superficie α -rettificabile* ogni sottoinsieme di \mathbb{R}^N immagine tramite una funzione Lipschitziana definita su un sottoinsieme misurabile di \mathbb{R}^α . Se tale funzione è iniettiva diremo che la superficie è *semplicemente α -rettificabile*.

Definizione 2.3.2 (Insieme α -rettificabile). Un α -insieme A è detto α -rettificabile se esiste un quasi ricoprimento $(A_i)_{i \in I}$ di superfici α -rettificabili, cioè se $\mathcal{H}^\alpha(A \setminus \bigcup A_i) = 0$. Se le superfici sono semplicemente α -rettificabili, A è detto *semplicemente α -rettificabile*.

Al contrario un α -insieme A è detto *puramente non rettificabile* se interseca qualsiasi superficie α -rettificabile in insiemi di misura \mathcal{H}^α nulla.

Restringiamoci ora al piano: denotiamo con $\mathbb{S}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$, sia $\theta \in \mathbb{S}^1$ e sia p_θ la proiezione ortogonale lungo la direzione θ . Presentiamo un criterio per provare la rettificabilità dei sottoinsiemi di \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.3.3 (Besicovitch). Sia A un 1-insieme puramente non rettificabile. Allora per quasi ogni $\theta \in \mathbb{S}^1$

$$\mathcal{H}^1(p_\theta(A)) = 0.$$

Dimostrazione. È la Proposizione 12.26 di [9]. □

In realtà vale anche il viceversa (Teorema 18.1 di [8]). Questo teorema è stato dimostrato nel caso generale di α -sottoinsiemi di \mathbb{R}^N da H. Federer.

Le Proprietà di Proiezione che dimostreremo per i minimi del funzionale di Mumford-Shah (vedi Teorema 3.6.18) ci garantiranno allora la 1-rettificabilità di tali insiemi.

È possibile infine provare il seguente teorema, sugli insiemi 1-rettificabili.

Teorema 2.3.4. Sia A un 1-insieme semplicemente rettificabile. Allora esiste un quasi ricoprimento $(c_j)_{j \in \mathbb{N}}$ di A , fatto di curve semplici tali che

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{H}^1(c_j) \leq \mathcal{H}^1(A) + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Si tratta del Teorema 11.23 di [9]. □

Dunque i minimi del funzionale di Mumford-Shah, a meno di un insieme di misura piccola, sono essenzialmente un'unione (finita) di curve (Teorema 3.7.2).

2.4 Proprietà di semicontinuità della misura di Hausdorff

Vogliamo ora richiamare delle proprietà di (semi)continuità della misura di Hausdorff: purtroppo non è detto che se una successione di insiemi A_n converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un insieme A , allora anche la misura degli insiemi A_n converga alla misura di A ; questo non è valido nemmeno per la semicontinuità.

A titolo di esempio, mostriamo una successione di sottoinsiemi di $A = [0, 1]$ che rende la misura di Hausdorff non inferiormente semicontinua. Sia, per $n \geq 1$,

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} \left[\frac{kn}{n^2}, \frac{kn+1}{n^2} \right].$$

Notiamo che A_n è costruito dividendo A in n^2 intervalli e prendendo l'unione di quelli che corrispondono a multipli interi di n .

Ma ora, calcolando la distanza tra A_n e A troviamo che

$$d_H(A_n, A) = \frac{n-1}{n^2} \rightarrow 0$$

e quindi A_n converge per la distanza di Hausdorff a A . Inoltre

$$\mathcal{H}^1(A_n) = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$$

Ma $\mathcal{H}^1(A) = 1$ e quindi la misura di Hausdorff \mathcal{H}^1 non è inferiormente semicontinua per la distanza di Hausdorff in quanto

$$1 = \mathcal{H}^1(A) > \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(A_n) = 0.$$

È possibile dare però delle condizioni sulla successione A_n in maniera tale da rendere la misura di Hausdorff semicontinua inferiormente (o superiormente). Una di queste condizioni è una proprietà di "concentrazione" della successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Iniziamo presentando la proprietà di semicontinuità superiore, valida solamente nei sottoinsiemi di $[0, 1]$ (In realtà la cosa può essere estesa a qualsiasi intervallo di \mathbb{R} di misura finita).

Teorema 2.4.1. Sia $X = [0, 1]$. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di sottoinsiemi misurabili di X che convergono rispetto alla distanza di Hausdorff a un insieme A , allora

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(A_n) \leq \mathcal{H}^1(A).$$

Dimostrazione. È la Proposizione 10.7 di [9]. □

È possibile inoltre dimostrare il seguente teorema di semicontinuità inferiore per la misura di Hausdorff 1-dimensionale.

Teorema 2.4.2 (di Gołab). Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi compatti e connessi di \mathbb{R}^n che converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un insieme compatto A . Allora A è compatto, connesso e

$$\mathcal{H}^1(A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(A_n).$$

Dimostrazione. Si tratta del Teorema 3.18 di [7]. □

L'ipotesi che ogni insieme della successione sia connesso è molto restrittiva. Questa ipotesi può essere però indebolita in vari modi: il più ovvio è quello di considerare una successione di insiemi che sono unione finita di al più un numero fissato di connessi.

Un modo meno ovvio di ottenere la semicontinuità inferiore della misura di Hausdorff è attraverso delle proprietà di "densità" e "concentrazione".

Definizione 2.4.3. Siano A e K due sottoinsiemi di X . Denotiamo con $\mathcal{D}_K^\alpha(A)$ la densità media di K su A , definita come

$$\mathcal{D}_K^\alpha(A) = \frac{\mathcal{H}^\alpha(K \cap A)}{c_\alpha(\text{diam } A)^\alpha},$$

dove c_α è la costante di normalizzazione della misura di Hausdorff.

Definizione 2.4.4. Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di X che converge rispetto alla distanza di Hausdorff a un insieme A . Diciamo che la successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è *uniformemente concentrata* se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento di Vitali approssimato \mathcal{B} di A tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{D}_{A_n}^\alpha(B) > 1 - \varepsilon.$$

Lungo le successioni uniformemente concentrate possiamo allora recuperare la proprietà di semicontinuità inferiore, come vediamo ora nel seguente teorema.

Teorema 2.4.5. Sia $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi di X uniformemente concentrata e convergente a un insieme A rispetto alla distanza di Hausdorff. Allora

$$\mathcal{H}^\alpha(A) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^\alpha(A_n).$$

Dimostrazione. Per la dimostrazione si rimanda al Teorema 10.14 di [9]. □

Siccome non è detto che la segmentazione di un'immagine fornisca un insieme di contorni connesso, come è intuitivo che sia, nel prossimo capitolo vorremo sfruttare proprio questo teorema per recuperare la semicontinuità inferiore per la parte di misura di Hausdorff nel Funzionale di Mumford-Shah.

Capitolo 3

Il modello di Mumford-Shah generale

In questo capitolo studieremo il modello di Mumford-Shah generale per la segmentazione di immagini. Rispetto a quanto fatto nel Capitolo 1, non cercheremo più una funzione u costante sulle regioni della segmentazione. Il funzionale di Mumford-Shah in questo caso comprende anche un termine che dipende dalla norma L^2 di ∇u , per garantire che una sorta di "energia di sfumatura" sia piccola.

3.1 Premessa

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo aperto e $g : \Omega \rightarrow [0, 1]$ una funzione misurabile e limitata che rappresenterà la scala di grigio dell'immagine data. Senza perdita di generalità possiamo supporre che sia $|g(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in \Omega$ e che $\text{diam } \Omega \leq 1$. Anche qui la scelta che Ω sia un rettangolo è solo per chiarezza di esposizione: si potrebbe considerare Ω come un aperto connesso del piano con frontiera \mathcal{C}^1 a tratti. L'energia da minimizzare è

$$(3.1) \quad E(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx + \mathcal{H}^1(K),$$

dove K rappresenta un 1-sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$, $u : \Omega \setminus K \rightarrow [0, 1]$ una funzione nello spazio di Sobolev $H^1(\Omega \setminus K)$ e $|\nabla u|$ indica la norma euclidea del gradiente debole $\nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2})$. A volte sarà necessario considerare u o ∇u definiti su tutto Ω : decidiamo di estendere per convenzione $u(x) = 0$ e $\nabla u(x) = 0$ per $x \in K$.

Una *segmentazione* di Ω è un 1-sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$. Per ora supponiamo che la seconda variabile del Funzionale (3.1) sia una segmentazione, poi ci restringeremo a quelle Ahlfors-regolari, dove avremo la proprietà di compattezza. Per ora supponiamo inoltre che $\mathcal{H}^1(K \cap \partial\Omega) = 0$: tutte ciò che dimostreremo verrà fatto localmente, su un disco contenuto in Ω . Rimuoveremo questa ipotesi nell'Osservazione 3.6.19.

3.2 Il funzionale di Mumford-Shah

Decomponiamo il Funzionale di Mumford-Shah (3.1) nella sua parte integrale

$$I(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} (u - g)^2 dx$$

e nella parte di misura di Hausdorff 1-dimensionale. Nel processo di minimizzazione, prima fissiamo K e minimizziamo rispetto a u . Allora, se denotiamo con u_K la funzione per la quale

il termine $I(u, K)$ è minimo, possiamo scrivere $E(K) = I(K) + \mathcal{H}^1(K)$ dove $I(K) = I(u_K, K)$. Poi minimizzeremo rispetto a K .

Sia quindi K una segmentazione fissata e minimizziamo $I(u) := I(u, K)$. Considereremo a volte la restrizione dell'integrale a qualche sottodominio B con frontiera \mathcal{C}^1 a tratti: lo denotiamo con

$$I_B(u) = \int_{B \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \int_{B \setminus K} (u - g)^2 dx.$$

Chiamiamo $\nu(x)$ la normale esterna a B nel punto $x \in \partial B$, definita quasi ovunque. Se $u \in \mathcal{C}^1(\overline{B})$, denotiamo con $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ la derivata direzionale nella direzione normale uscente a ∂B .

L'esistenza di una u che minimizzi $I(u)$ quando K è fissato si ottiene dal seguente lemma con $A = \Omega \setminus K$ e da classici teoremi di esistenza e regolarità per le equazioni ellittiche con condizioni al bordo di Neumann (vedere ad esempio [5]).

Lemma 3.2.1. Sia A un insieme aperto connesso e sia g una funzione misurabile definita su A tale che $|g(x)| \leq \frac{1}{2}$ per ogni $x \in A$. Sia u il minimo del funzionale

$$I(u) = \int_A |\nabla u|^2 + (u - g)^2 dx$$

su $H^1(A)$ (tale minimo è unico in quanto il funzionale è convesso). Allora u è una funzione di classe \mathcal{C}^1 nell'aperto A e soddisfa in senso debole l'equazione

$$(3.2) \quad -\Delta u + u = g \quad \text{su } A.$$

Se inoltre ∂A è \mathcal{C}^1 , allora $u \in \mathcal{C}^1(\overline{A})$ e soddisfa la condizione al bordo di Neumann

$$(3.3) \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial A.$$

Dimostrazione. Deriviamo le Equazioni 3.2 e 3.3 per un minimo del funzionale $I(u)$. Il fatto che $u \in \mathcal{C}^1(A)$ deriva dalla teoria della regolarità delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali. Sia u il minimo di $I(u)$ su $H^1(A)$, sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(A)$ e consideriamo, per $\varepsilon \in \mathbb{R}$, la funzione

$$\begin{aligned} f(\varepsilon) &:= I(u + \varepsilon\varphi) = \int_A |\nabla u + \varepsilon\nabla\varphi|^2 + (u + \varepsilon\varphi - g)^2 dx \\ &= \int_A |\nabla u|^2 + \varepsilon^2 |\nabla\varphi|^2 + 2\varepsilon \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + (u - g)^2 + \varepsilon^2 \varphi^2 + 2\varepsilon(u - g)\varphi dx. \end{aligned}$$

Siccome u è minimo di $I(u)$, $f(\varepsilon)$ ha un minimo per $\varepsilon = 0$ e quindi $f'(0) = 0$. Si calcola

$$f'(\varepsilon) = \int_A 2\varepsilon |\nabla\varphi|^2 + 2\langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + 2\varepsilon\varphi^2 + 2(u - g)\varphi dx$$

e allora la condizione di stazionarietà diventa

$$0 = f'(0) = 2 \int_A \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle + (u - g)\varphi dx.$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(A)$.

Per la teoria della regolarità $u \in H^2(A)$, ovvero possiede derivate seconde in $L^2(A)$ in senso debole. Inoltre, poiché $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(A)$, abbiamo che

$$(3.4) \quad \int_A \langle \nabla u, \nabla\varphi \rangle dx = - \int_A \Delta u \varphi dx$$

e l'equazione diventa

$$(3.5) \quad \int_A (-\Delta u + u - g) \varphi \, dx = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(A)$, cioè u soddisfa in senso debole l'Equazione (3.2).

Se ∂A è \mathcal{C}^1 i conti possono essere ripetuti con $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{A})$; l'unica differenza è presente nell'Equazione (3.4), che diventa

$$\int_A \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle \, dx = \int_A [\operatorname{div}(\varphi \nabla u) - \Delta u \varphi] \, dx.$$

Per il Teorema della Divergenza allora si trova che

$$\int_A \operatorname{div}(\varphi \nabla u) \, dx = \int_{\partial A} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^1.$$

e tenendo conto dell'Equazione (3.5), la condizione di stazionarietà diventa

$$\int_{\partial A} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu} \, d\mathcal{H}^1 = 0$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{C}(\partial A)$. Questo implica allora che

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{su } \partial A,$$

che è l'Equazione (3.3). □

Mostriamo che la funzione u così ottenuta mantiene la caratteristica di g di essere limitata sull'insieme A : questa proprietà si ottiene dal Lemma di Stampacchia, la cui dimostrazione nel caso generale può essere trovata ad esempio in [3].

Lemma 3.2.2 (Stampacchia). Sia A un aperto connesso, u una funzione in $H^1(A)$ e t un numero reale. Allora la funzione $x \mapsto u^t(x) = \max\{t, u(x)\} \in H^1(A)$ e inoltre

$$(3.6) \quad \int_A |\nabla u^t(x)|^2 \, dx \leq \int_A |\nabla u(x)|^2 \, dx.$$

Dimostrazione. Mostriamo la disuguaglianza solo nel caso in cui $u \in \mathcal{C}^1(A)$. Siccome

$$u^t(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } u(x) \geq t \\ t & \text{se } u(x) < t \end{cases},$$

abbiamo che

$$\nabla u^t(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{se } u(x) \geq t \\ 0 & \text{se } u(x) < t \end{cases}$$

e quindi la Disuguaglianza (3.6) (e dunque il fatto che $\|\nabla u^t\|_{L^2(A)} < +\infty$) è immediata. □

Lemma 3.2.3. Sia u la funzione del Lemma 3.2.1. Allora $|u(x)| \leq \frac{1}{2}$.

Dimostrazione. Consideriamo la funzione

$$\tilde{u}(x) = \max \left\{ -\frac{1}{2}, \min \left\{ \frac{1}{2}, u(x) \right\} \right\} = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{se } u(x) < -\frac{1}{2} \\ u(x) & \text{se } -\frac{1}{2} \leq u(x) \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{se } u(x) \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Allora $|\tilde{u} - g| \leq |u - g|$ e per il Lemma di Stampacchia 3.2.2 abbiamo che $\tilde{u} \in H^1(\Omega)$ e soddisfa $I(\tilde{u}) \leq I(u)$. Ora, tenendo conto del fatto che il funzionale $I(u)$ è strettamente convesso (e quindi il suo minimo è unico), deduciamo che $u = \tilde{u}$ quasi ovunque e quindi $|u(x)| = |\tilde{u}(x)| \leq \frac{1}{2}$ per quasi ogni $x \in A$. \square

Vediamo ora la proprietà di semicontinuità inferiore per il funzionale $I(K)$.

Lemma 3.2.4. Sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di segmentazioni tali che $K_n \rightarrow K$ rispetto alla distanza di Hausdorff. Allora

$$I(K) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(K_n).$$

Inoltre se $I(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} I(K_n)$, allora $u_{K_n} \rightarrow u_K$ e $\nabla u_{K_n} \rightarrow \nabla u_K$ in $L^2(\Omega \setminus K)$.

Dimostrazione. Poniamo, per comodità, $u_n = u_{K_n}$. La successione di funzioni u_n , definita su $\Omega \setminus K_n$ e estesa a 0 su K_n è uniformemente limitata in $L^2(\Omega)$. Infatti per ogni n si ha che $|u_n(x)| \leq \frac{1}{2}$ e quindi

$$\int_{\Omega} |u_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{4} \mathcal{L}^2(\Omega) < \infty.$$

Allora, dalla compattezza debole di $L^2(\Omega)$, esiste una sottosuccessione che converge debolmente in $L^2(\Omega)$. Allo stesso modo possiamo supporre che ∇u_n converga debolmente a una funzione a valori vettoriali v in $L^2(\Omega)$. Vogliamo allora provare che $v = \nabla u$ su $\Omega \setminus K$. Infatti sia $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$ una funzione test di classe \mathcal{C}^∞ a supporto compatto in $\Omega \setminus K$. Siccome $\text{supp}(\varphi)$ è compatto, per n abbastanza grande, abbiamo che

$$\text{supp}(\varphi) \subset \Omega \setminus K_n$$

e quindi

$$\int_{\Omega} u_n \nabla \varphi dx = - \int_{\Omega} (\nabla u_n) \varphi dx.$$

Ora, dalla definizione di convergenza debole il primo termine converge a $\int_{\Omega} u \nabla \varphi dx$ e il secondo converge a $-\int_{\Omega} v \varphi dx$. Il fatto che $\nabla u = v$ su $\Omega \setminus K$ è ottenuto allora dall'arbitrarietà di φ . Ora, dalla semicontinuità inferiore della norma L^2 rispetto alla convergenza debole in L^2 , abbiamo che

$$(3.7) \quad I(K) = I(u_K, K) \leq I(u, K) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(u_n, K_n)$$

e quindi abbiamo ottenuto la semicontinuità del funzionale I .

La seconda parte della tesi deriva dal fatto che, quando $I(K) = \lim_n I(K_n)$, allora la Disuguaglianza (3.7) diventa un'uguaglianza e quindi $u = u_K$. Pertanto le norme L^2 di u_n e ∇u_n convergono alle norme L^2 di u e ∇u e quindi si ha la convergenza forte delle successioni. \square

Siccome alcune delle cose che tratteremo si basano su formule che richiedono che la frontiera dell'insieme di definizione sia regolare (vedi ad esempio le formule di Green), poiché $\Omega \setminus K$ non è regolare, presentiamo un metodo per approssimare K con un insieme regolare K_ε .

Lemma 3.2.5 (Approssimazione di K). Sia K un 1-sottoinsieme compatto di Ω . Allora esiste una successione $(K_\varepsilon) \supset K$ di insiemi con frontiera \mathcal{C}^1 a tratti tale che per $\varepsilon \rightarrow 0$ vale $K_\varepsilon \rightarrow K$ rispetto alla distanza di Hausdorff e $\mathcal{L}^2(K_\varepsilon) \rightarrow 0$.

Dimostrazione. È il Lemma 13.11 di [9]. □

Diamo ora delle definizioni che ci dicono quando un insieme è "stabile" per il precedente tipo di approssimazioni. Questa proprietà di stabilità verrà richiesta nella definizione di *ricoprimento a piccola oscillazione* (vedi Definizione 3.4.1) e serve per poter estendere le formule di Green; per maggiori dettagli consultare il Teorema 13.13 di [9].

Definizione 3.2.6. Un sottoinsieme aperto A di Ω è affidabile rispetto a $u = u_K$ se c'è una successione (K_ε) che approssima K come nel Lemma 3.2.5 tale che $u_\varepsilon = u_{K_\varepsilon}$ e ∇u_ε convergono a u e ∇u in $L^2(\partial A)$.

Definizione 3.2.7. Un sottoinsieme aperto A di Ω è affidabile rispetto a K se $\mathcal{H}^1(K_\varepsilon \cap \partial A) \rightarrow 0$ per $\varepsilon \rightarrow 0$.

In realtà è possibile mostrare che, se ci restringiamo al caso delle palle euclidee, la proprietà di affidabilità è garantita.

Proposizione 3.2.8. Sia K un 1-sottoinsieme compatto di Ω e sia $x \in \Omega$. Allora per quasi ogni r tale che $B(x, r) \subset \Omega$, $B(x, r)$ è affidabile rispetto a $u = u_K$ e K .

Dimostrazione. È la Proposizione 13.12 di [9]. □

3.3 Il metodo di Escissione

Presentiamo ora lo strumento principale che servirà a provare le proprietà di regolarità dei minimi del funzionale di Mumford-Shah: il metodo di Escissione.

Esso consiste nel mostrare che, non appena l'insieme K è troppo "irregolare" dentro qualche disco D e u è "abbastanza liscia" attorno a K , allora l'operazione di Escissione, che consiste essenzialmente nel rimuovere i punti di K contenuti nel disco D e aggiungere un sottoinsieme di ∂D , diminuisce il funzionale $E(K)$. Siccome questo non può avvenire se K è un minimo, allora K deve essere "regolare" all'interno di D .

Più in dettaglio studieremo le conseguenze di una proprietà di "quasi-minimalità" rispetto al metodo di Escissione (vedi la Definizione 3.3.3): essa sarà ovviamente soddisfatta da un minimo del funzionale di Mumford-Shah. Da questa proprietà e da una proprietà tecnica che ci garantirà che possiamo trascurare i punti isolati di K , riusciremo a dedurre varie caratteristiche strutturali di un minimo di $E(K)$. In breve, tratteremo:

- La proprietà di *Uniforme Densità* (Definizione 3.6.3): esiste una costante $\beta > 0$ tale che per ogni punto $x \in K$, $\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) > \beta R$, dove $D(R) = B(x, R)$.
- La proprietà di *Uniforme Concentrazione* (Definizione 3.6.7): per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un $\alpha > 0$ tale che ogni disco $D(R)$ centrato in K contiene un disco D' di raggio maggiore di αR dentro al quale K è "concentrato", cioè $\mathcal{H}^1(K \cap D') > (1 - \varepsilon) \text{diam } D'$.
- Due *Proprietà di Proiezione* (Definizioni 3.6.12 e 3.6.14): la prima dice che esiste una costante universale β tale che per ogni punto $x \in K$,

$$\mathcal{H}^1(p(K \cap D(R))) + \mathcal{H}^1(p^\perp(K \cap D(R))) > \beta R,$$

dove p e p^\perp denotano la proiezione in due direzioni ortogonali tra loro, mentre la seconda è una versione "localizzata" della prima, come la proprietà di Uniforme Concentrazione lo è rispetto alla proprietà di Densità.

Dalle proprietà di Proiezione, per il Teorema 2.3.3, otterremo poi che i minimi del Funzionale di Mumford-Shah sono insiemi 1-rettificabili e quindi, a meno di un insieme di misura piccola, unione di un numero finito di curve. Inoltre, grazie alle proprietà di Uniforme Concentrazione, dedurremo anche che l'insieme delle segmentazioni, che per la proprietà di Uniforme Densità saranno quelle Ahlfors-regolari (vedi Definizione 3.7.1), è un insieme compatto. Questo ci garantirà, grazie anche al Teorema 2.4.5, l'esistenza di un minimo.

Definiamo dunque l'operazione di Escissione:

Definizione 3.3.1. Sia K una segmentazione, $u = u_K$ e $0 < R \leq 1$ un numero fissato. Sia, per $x \in K$ e $s \in [\frac{R}{2}, R]$, $D(s) = B(x, s)$. Diciamo che l'insieme $K(s)$ è ottenuto tramite *Escissione* di $D(s)$ da K se

$$K(s) = (K \setminus D(s)) \cup T(s),$$

dove $T(s)$ è un sottoinsieme chiuso di $\partial D(s)$ contenente $K \cap \partial D(s)$ e può essere vuoto, uguale a tutta la frontiera $\partial D(s)$, o un'unione finita di archi chiusi, ognuno dei quali interseca K ed è tale che, se due punti stanno nella stessa componente connessa di K e in $\partial D(s)$, appartengono allo stesso arco.

Inoltre, una volta scelto $T(s)$, sia v_s soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta v_s + v_s = g & \text{su } D(s) \\ v_s = u & \text{su } \partial D(s) \setminus T(s) \end{cases}$$

e poniamo $u_s = u$ su $\Omega \setminus D(s)$ e $u_s = v_s$ su $D(s)$. Diciamo allora che la coppia $(u_s, K(s))$ è ottenuta tramite *Escissione* di $D(s)$ da (u, K) .

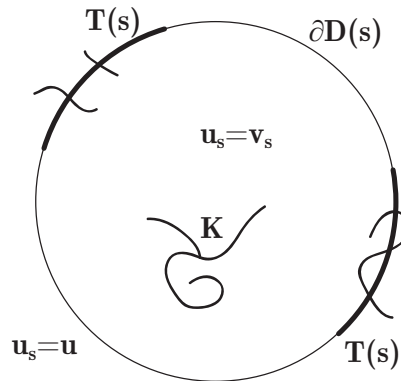


Figura 3.1: Il metodo di Escissione.

Osservazione 3.3.2. Le restrizioni sulla scelta di $T(s)$ sono state fatte in maniera tale da garantire che il numero delle componenti connesse di $K(s)$ non cresca rispetto a quelle di K . Infatti se $\partial D(s) \cap K = \emptyset$, allora almeno una componente connessa di K deve essere contenuta in $D(s)$, siccome esso contiene almeno un punto: con l'operazione di Escissione questa viene rimossa. Quindi, anche se aggiungiamo l'intero cerchio $\partial D(s)$ a K , il numero di componenti connesse non aumenta. Negli altri casi possiamo solo aggiungere degli archi che sono sottoinsiemi propri di $\partial D(s)$: così facendo il numero di componenti connesse non aumenta passando da K a $K \cup T(s)$.

Enunciamo ora la proprietà di "quasi-minimalità" che è alla base di tutte le proprietà sopra esposte.

Definizione 3.3.3 (Proprietà (M)). Sia K una segmentazione. Diremo che K soddisfa la proprietà (M) se $E(K(s)) \geq E(K)$ per ogni insieme $K(s)$ ottenuto da K tramite escissione.

Lemma 3.3.4. Sia K una segmentazione che soddisfa la proprietà (M). Allora valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\int_{D(R)} |\nabla u|^2 dx \leq 3\pi R$$

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \leq 3\pi R.$$

Dimostrazione. Poniamo $K(R) = (K \setminus D(R)) \cup \partial D(R)$ e sia $w = u$ su $\Omega \setminus D(R)$ e $w = 0$ su $D(R)$. Siccome K soddisfa la proprietà (M) abbiamo che $E(w, K(R)) \geq E(u_R, K(R)) \geq E(u, K)$. Allora

$$I(w, K(R)) + \mathcal{H}^1(K(R)) \geq I(u, K) + \mathcal{H}^1(K)$$

e, siccome $\mathcal{H}^1(K(R)) = \mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1(K \cap D(R)) + 2\pi R$, questo implica che

$$I(w, K(R)) \geq I(u, K) - 2\pi R.$$

Ora se per assurdo fosse che $\int_{D(R)} |\nabla u|^2 dx > 3\pi R$, ricordando che $R \leq 1$, avremmo che

$$\begin{aligned} I(w, K(R)) &= \int_{\Omega} |\nabla w|^2 + (w - g)^2 dx = \int_{\Omega \setminus D(R)} |\nabla u|^2 + (u - g)^2 dx + \int_{D(R)} g^2 dx \\ &= I(u, K) - \int_{D(R)} |\nabla u|^2 dx + \int_{D(R)} g^2 - (u - g)^2 dx \\ &< I(u, K) - 3\pi R + \pi R^2 \leq I(u, K) - 3\pi R + \pi R \\ &= I(u, K) - 2\pi R. \end{aligned}$$

Analogamente, se per assurdo fosse $\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) > 3\pi R$, avremmo che

$$I(w, K(R)) \leq I(u, K) + \pi R.$$

Decomponendo la parte integrale come prima e tenendo conto del fatto che

$$\int_{D(R)} |\nabla u|^2 dx \geq 0,$$

troviamo che

$$\begin{aligned} I(w, K(R)) &= I(u, K) - \int_{D(R)} |\nabla u|^2 dx + \int_{D(R)} g^2 - (u - g)^2 dx \\ &\leq I(u, K) + \pi R^2 \leq I(u, K) + \pi R : \end{aligned}$$

infatti $g^2 - (u - g)^2 \leq 1$ siccome $g \leq 1$. □

Le due disuguaglianze provate nel Lemma 3.3.4 saranno importanti nelle dimostrazioni delle proprietà di Uniforme Concentrazione (Teorema 3.6.11) e di Proiezione (Teorema 3.6.18).

3.4 Ricoprimenti a piccola oscillazione

Introduciamo ora un altro dei concetti chiave per dimostrare le proprietà sopra elencate delle segmentazioni minimali per il funzionale di Mumford-Shah: i *ricoprimenti a piccola oscillazione*.

D'ora in poi sia K una segmentazione che soddisfa la proprietà (M) e $D(R)$ un disco di raggio R centrato in un punto di K . Per *ricoprimento \mathcal{C}^1 a tratti* di $K \cap D(R)$ intendiamo un ricoprimento $(D_i)_{i \in I}$ di $K \cap D(R)$ tale che ogni ∂D_i sia un'unione finita di curve \mathcal{C}^1 a tratti iniettive tranne che negli estremi.

Definizione 3.4.1 (Ricoprimento a piccola oscillazione). Diciamo che un ricoprimento \mathcal{C}^1 a tratti $(D_i)_{i \in I}$ di $K \cap D(R)$ è un ricoprimento a piccola oscillazione di costanti μ e ν se per ogni $i \in I$ l'insieme D_i è semplicemente connesso, affidabile rispetto u e K (vedi le Definizioni 3.2.6 e 3.2.7), ∂D_i interseca K all'interno di $D(R)$ al più in un punto,

$$(3.8) \quad \int_{\partial D_i} |\nabla u| d\mathcal{H}^1 \leq \nu \mathcal{H}^1(\partial D_i)^{\frac{1}{2}}$$

e

$$(3.9) \quad \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i) \leq \mu R.$$

Osservazione 3.4.2. Siccome ∂D_i interseca K all'interno di $D(R)$ al più in un punto, per le ipotesi di tipo topologico fatte su D_i abbiamo che $\partial D_i \setminus K$ è connesso e quindi per ogni $i \in I$

$$\text{osc}_{\partial D_i}(u) = \sup_{\partial D_i} u - \inf_{\partial D_i} u \leq \int_{\partial D_i} |\nabla u| d\mathcal{H}^1 \leq \nu \mathcal{H}^1(\partial D_i)^{\frac{1}{2}},$$

cosa che giustifica il nome "ricoprimento a piccola oscillazione".

Osservazione 3.4.3. È possibile supporre che i D_i siano dischi. Allora, per la Proposizione 3.2.8, la richiesta di affidabilità del ricoprimento è automaticamente soddisfatta e, a meno di costanti, le disuguaglianze (3.8), (3.9) e tutti gli enunciati successivi che coinvolgono termini dipendenti da $\mathcal{H}^1(\partial D_i)$ in realtà dipendono dai raggi dei dischi D_i . Per semplicità di esposizione supporremo d'ora in poi che i ricoprimenti a piccola oscillazione siano fatti di dischi. L'unica eccezione verrà fatta nel dimostrare la Seconda Proprietà di Proiezione 3.6.14, dove si utilizzano ricoprimenti fatti di quadrati.

Vedremo ora che se una segmentazione K soddisfa la proprietà (M), questo implica la non esistenza di un ricoprimento a piccola oscillazione per $K \cap D(R)$.

3.5 Stima dell'energia di escissione

Con il prossimo lemma andiamo a stimare come varia l'energia E quando procediamo con l'escissione di alcune parti della segmentazione K . Precisamente, calcoliamo la differenza

$$E(u_s, K(s)) - E(u, K) = I_{D(s)}(v_s) - I_{D(s)}(u) + \mathcal{H}^1(T(s)) - \mathcal{H}^1(K \cap D(s)),$$

dove v_s è la funzione della Definizione 3.3.1.

Lemma 3.5.1. Sia K una segmentazione che soddisfa la proprietà (M) e sia $(D_i)_{i \in I}$ un ricoprimento a piccola oscillazione di $K \cap D(R)$ con costanti μ e ν . Allora esistono un $s \in [\frac{R}{2}, R]$ e una costante $C = C(\mu, \nu)$ tali che

$$E(u_s, K(s)) - E(u, K) \leq C(\mu, \nu) \sup_{i \in I} \left(\frac{\mathcal{H}^1(\partial D_i)}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i) - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2))$$

La dimostrazione di questa stima utilizza vari fatti che possono essere trovati nei Capitoli 13 e 14 di [9]; ci accontentiamo qui di dare l'idea di una parte della dimostrazione, soffermandoci sul fatto che esista un raggio s per il quale è possibile attuare il procedimento di escissione ed avere tale stima.

Innanzitutto è necessaria una limitazione sul numero di archi di curva che costituiscono l'insieme $T(s)$. Questa stima verrà fatta per s in un sottoinsieme di $[\frac{R}{2}, R]$ di misura abbastanza grande.

Lemma 3.5.2. Sia K una segmentazione che soddisfa la proprietà (M) e sia $(D_i)_{i \in I}$ un ricoprimento a piccola oscillazione. Sia

$$J(s) = \{i \in I : D_i \cap \partial D(s) \neq \emptyset\}.$$

Allora esistono un insieme $F \subset [\frac{R}{2}, R]$ con $\mathcal{H}^1(F) \geq \frac{R}{4}$ e una costante $C > 0$ tali che per ogni $s \in F$

$$\text{Card } J(s) \leq C$$

e

$$\int_{\partial D(s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 \leq C.$$

Dimostrazione. È il Lemma 14.19 di [9]. □

Presentiamo ora la seconda parte della dimostrazione del Lemma 3.5.1: ulteriori dettagli si trovano a pagina 178 di [9].

Dimostrazione. Siano F e $J(s)$ gli insiemi del Lemma 3.5.2 e $(D_i)_{i \in I}$ un ricoprimento a piccola oscillazione di $K \cap D(R)$. È possibile mostrare, tramite delle stime sul termine

$$I_{D(s)}(v_s) - I_{D(s)}(u),$$

che per ogni $s \in F$ vale una stima del tipo

$$E(u_s, K(s)) - E(u, K) \leq \phi(s),$$

dove

$$\begin{aligned} \phi(s) &= C \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i)^{\frac{1}{2}} \int_{\partial D_i} \frac{1}{\sqrt{s-|x|}} d\mathcal{H}^1(x) + C \sum_{j \in J(s)} \mathcal{H}^1(\partial D_j) \\ &+ CR^{\frac{1}{2}} \sum_{j \in J(s)} \int_{\partial D(s) \cap \partial D_j} \frac{1}{\sqrt{s-|x|}} d\mathcal{H}^1(x) + 5\mathcal{L}^2 \left(\bigcup_{i \in I} D_i \cap D(s) \right) - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)). \end{aligned}$$

Queste stime vengono fatte applicando una generalizzazione delle formule di Green e possono essere trovate nel Lemma 14.27 di [9]. Per questo motivo nella definizione di ricoprimento a piccola oscillazione è richiesta la proprietà di affidabilità (vedi Definizione 3.4.1).

Siccome la funzione ϕ per certi valori di $s \in F$ non è limitata e anzi potrebbe assumere il valore $+\infty$ (ad esempio quando ∂D_j è contenuto in $D(s)$ ed è tangente ad esso), si procede a fare la media integrale in entrambi i termini della disuguaglianza. Allora, siccome $\mathcal{H}^1(F) \geq \frac{R}{4}$, abbiamo che

$$\frac{1}{\mathcal{H}^1(F)} \int_F [E(u_s, K(s)) - E(u, K)] ds \leq \frac{1}{\mathcal{H}^1(F)} \int_F \phi(s) ds \leq \frac{4}{R} \int_0^R \phi(s) ds$$

e per il Lemma 14.43 di [9] l'ultimo termine è limitato ed è possibile arrivare alla seguente stima:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathcal{H}^1(F)} \int_F [E(u_s, K(s)) - E(u, K)] ds &\leq \frac{C}{R^{\frac{1}{2}}} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i)^{\frac{3}{2}} - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)) \\ &\leq C \sup_{i \in I} \left(\frac{\mathcal{H}^1(\partial D_i)}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i) \\ &\quad - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)), \end{aligned}$$

siccome $\sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial D_i) \leq CR$. Allora la stessa disuguaglianza rimane valida anche se sostituiamo il termine a sinistra con $E(u_{\bar{s}}, K(\bar{s})) - E(u, K)$ per un qualche $\bar{s} \in F$. \square

3.6 Proprietà di una segmentazione ottimale

Presentiamo ora le proprietà di densità, concentrazione e proiezione di una segmentazione minimale e, più in generale, delle segmentazioni che soddisfano la proprietà (M). Ricordiamo che ad ogni K è associata una funzione $u = u_K$ come nel Lemma 3.2.1.

La proprietà di Essenzialità

Enunciamo, senza dimostrazione, una proprietà tecnica che garantisce che nessun punto di una segmentazione ottimale è "isolato".

Definizione 3.6.1. Sia K una segmentazione. K è *essenziale* se per ogni $x \in K$ e per ogni $r > 0$ si ha $\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) > 0$.

Proposizione 3.6.2. Sia K una segmentazione che soddisfa la proprietà (M). Allora c'è una segmentazione essenziale $\tilde{K} \subset K$ tale che $E(K) = E(\tilde{K})$ e $\mathcal{H}^1(K \setminus \tilde{K}) = 0$. Inoltre $u_{\tilde{K}} = u_K$ quasi ovunque.

Dimostrazione. Si tratta del Teorema 15.1 di [9]. \square

Quindi d'ora in poi è possibile supporre che ogni segmentazione che soddisfi la proprietà (M) sia essenziale.

La proprietà di Uniforme Densità

Definizione 3.6.3 (Proprietà di Uniforme Densità, prima formulazione). Diciamo che un sottoinsieme chiuso K di Ω soddisfa la proprietà di *Uniforme Densità* se esiste una costante β tale che per ogni disco $D(R) = B(x, R) \subset \Omega$ con $R \leq 1$ e $x \in K$ vale

$$(3.10) \quad \mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \geq \beta R.$$

È possibile altresì dare la seguente definizione equivalente:

Definizione 3.6.4 (Proprietà di Uniforme Densità, seconda formulazione). Diciamo che un sottoinsieme chiuso K di Ω soddisfa la proprietà di *Uniforme Densità* se esiste una costante β tale che per ogni disco $D(R) \subset \Omega$ con $R \leq 1$ tale che

$$(3.11) \quad \mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \leq \beta R$$

si ha $K \cap D(R/2) = \emptyset$.

Mostreremo ora che un minimo del funzionale di Mumford-Shah, se esiste, soddisfa la proprietà di Uniforme Densità con una costante β che non dipende nè da K nè da Ω . L'idea alla base della dimostrazione è la seguente: se non vale (3.10) per qualche disco $D(R)$, possiamo trovare un ricoprimento a piccola oscillazione di $K \cap D(R)$ e da questo dedurremo che $K \cap D(R/2) = \emptyset$.

Presentiamo innanzitutto, senza dimostrazione, un lemma che garantisce l'esistenza di un ricoprimento a piccola oscillazione non appena la Disuguaglianza (3.10) è violata.

Lemma 3.6.5 (Lemma di ricoprimento). Sia K una segmentazione essenziale che soddisfa la proprietà (M). Sia $D(R)$ un disco contenuto in Ω centrato in K tale che

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \leq \beta R.$$

Allora esiste un ricoprimento a piccola oscillazione $(D_i)_{i \in I}$ di $K \cap D(R')$ dove $R' = R(1 - 50\beta)$ e $D_i = B(x_i, s_i)$ per ogni $i \in I$, con una costante universale ν e tale che per ogni $\rho \in [R/2, R]$ vale

$$(3.12) \quad \sum_{\substack{i \in I \\ D_i \subset D(\rho)}} s_i \leq 51 \mathcal{H}^1(K \cap D(\rho)).$$

Dimostrazione. È il Lemma 15.6 di [9]. □

Dimostriamo allora il seguente teorema:

Teorema 3.6.6. Supponiamo che K sia una segmentazione di Ω essenziale e tale che soddisfi la proprietà (M). Allora soddisfa anche la proprietà di Uniforme Densità per una qualche costante β indipendente da Ω e da K .

Dimostrazione. Fissiamo $D(R)$ un disco contenuto in Ω . Per dimostrare il teorema, dobbiamo mostrare che esiste $\beta \geq 0$ tale che

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \geq \beta R.$$

Alternativamente possiamo mostrare che se per qualche $\beta > 0$ abbiamo che

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \leq \beta R$$

allora $K \cap D(R/2) = \emptyset$. Dal Lemma 3.12 abbiamo che esiste un ricoprimento a piccola oscillazione $D_i = B(x_i, s_i)$ di $D(R')$, con $R' = R(1 - 50\beta)$ tale che per ogni $\rho \in [R/2, R]$ valga

$$\sum_{\substack{i \in I \\ D_i \subset D(\rho)}} s_i \leq 51 \mathcal{H}^1(K \cap D(\rho)).$$

Allora, dalla stima del Lemma 3.5.1, esiste un $s \in [R/2, R]$ tale che,

$$E(u_s, K(s)) - E(u, K) \leq C(\mu, \nu) \sup_{i \in I} \left(\frac{s_i}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{i \in I \\ D_i \subset D(s)}} s_i - \mathcal{H}^1(K \cap D(s)).$$

Dunque, siccome $\sum_i s_i \leq 51\mathcal{H}^1(K \cap D(\rho)) \leq 51\beta\rho \leq 51\beta R$, si ha che $s_i \leq 51\beta R$ per ogni $i \in I$ e, continuando la stima precedente con la Disuguaglianza (3.12) con $\rho = \frac{R}{2}$, abbiamo che

$$\begin{aligned} E(u_s, K(s)) - E(u, K) &\leq C(\mu, \nu) \sqrt{\frac{51}{2}} \beta 51 \mathcal{H}^1 \left(K \cap D \left(\frac{R}{2} \right) \right) - \mathcal{H}^1 \left(K \cap D \left(\frac{R}{2} \right) \right) \\ &= \left(51^{\frac{3}{2}} C(\mu, \nu) \sqrt{\beta} - 1 \right) \mathcal{H}^1 \left(K \cap D \left(\frac{R}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

È possibile quindi scegliere $\beta > 0$ tale che il termine tra parentesi sia strettamente negativo, cosa che implicherebbe $E(u_s, K(s)) - E(u, K) < 0$. Ora, siccome K soddisfa la proprietà (M), questa cosa è possibile solo se $\mathcal{H}^1(K \cap D(\frac{R}{2})) = 0$ e dall'essenzialità di K allora si deduce che $K \cap D(\frac{R}{2}) = \emptyset$. Questo prova la proprietà di Uniforme Densità. \square

La proprietà di Uniforme Concentrazione

Presentiamo ora un'altra proprietà delle segmentazioni che soddisfano la proprietà di minimalità (M): la proprietà di Uniforme Concentrazione. Essa sarà cruciale per recuperare la semicontinuità inferiore della misura di Hausdorff nell'insieme delle segmentazioni.

Definizione 3.6.7 (Proprietà di Uniforme Concentrazione). Diciamo che un sottoinsieme chiuso K di Ω soddisfa la proprietà di *Uniforme Concentrazione* su Ω se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una costante $\alpha(\varepsilon)$ tale che per ogni disco $D(R)$ contenuto in Ω e centrato in K con raggio $0 < R \leq 1$ esiste un disco $D = B(x, r)$ contenuto in $D(R)$ tale che

$$\text{diam } D \geq \alpha(\varepsilon) \text{ diam } D(R)$$

e

$$\mathcal{H}^1(K \cap D) \geq (1 - \varepsilon) \text{diam } D.$$

Osservazione 3.6.8. Chiaramente se un insieme K soddisfa la proprietà di Uniforme Concentrazione, esso soddisfa anche la proprietà di Uniforme Densità, con un valore di β pari a $2\alpha(\varepsilon)(1 - \varepsilon)$.

Definizione 3.6.9 (Condizione (A)). Diciamo che un sottoinsieme chiuso K di Ω soddisfa la *Condizione di Atomizzazione (A)*, su un disco $D(R)$ per due costanti α e ε positive se ogni disco D contenuto in $D(R)$ con $\text{diam } D \geq \alpha R$ soddisfa $\mathcal{H}^1(K \cap D) < (1 - \varepsilon) \text{diam } D$.

Osservazione 3.6.10. La condizione (A) e la proprietà di Uniforme Concentrazione sono strettamente legate. Infatti se un insieme K non soddisfa la proprietà di Uniforme Concentrazione, è possibile trovare un numero ε tale che per ogni scelta della costante $\alpha > 0$ la condizione (A) è soddisfatta per qualche disco.

Mostriamo allora che anche la proprietà di Uniforme Concentrazione è soddisfatta dalle segmentazioni che soddisfano (M).

Teorema 3.6.11. Supponiamo che K sia una segmentazione essenziale di Ω che soddisfa la proprietà (M). Allora soddisfa anche la proprietà di Uniforme Concentrazione. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, la scelta della costante $\alpha(\varepsilon)$ non dipende da K .

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che K non soddisfi la proprietà di Uniforme Concentrazione. Allora è possibile trovare un $\varepsilon > 0$ tale che valga la Condizione di Atomizzazione su un disco $D(R)$ per ogni $\alpha > 0$. Possiamo fissare un $\alpha > 0$, che poi potremo scegliere. Sia $R' = (1 - \alpha)R$ e $x \in K \cap D(R')$. Allora per la condizione (A) per ogni r con $2r \geq \alpha r$ vale

$$(3.13) \quad \mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)) \leq (1 - \varepsilon)2r.$$

Possiamo scegliere un $r \leq \alpha R$. Il nostro scopo è trovare un ricoprimento a piccola oscillazione di $K \cap D(R')$.

Consideriamo l'insieme

$$F = \{\rho \in]0, r[\mid \text{Card}(K \cap \partial D(x, \rho)) \leq 1\}.$$

Affermo che $\mathcal{H}^1(F) \geq \varepsilon r$. Infatti se fosse $\mathcal{H}^1(F) < \varepsilon r$, dal fatto che

$$\mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)) \geq \int_0^r \text{Card}(K \cap \partial D(x, \rho)) d\rho,$$

e dalla Disuguaglianza (3.13), avremmo che

$$\begin{aligned} (1 - \varepsilon)2r &\geq \mathcal{H}^1(K \cap D(x, r)) \geq \int_0^r \text{Card}(K \cap \partial D(x, \rho)) d\rho \\ &\geq \int_{[0, r] \setminus F} \text{Card}(K \cap \partial D(x, \rho)) d\rho \geq 2\mathcal{H}^1([0, r] \setminus F) \\ &\geq 2(r - \mathcal{H}^1(F)). \end{aligned}$$

Quindi si avrebbe che $\mathcal{H}^1(F) \geq \varepsilon r$, che è in contraddizione con l'ipotesi.

È possibile allora scegliere $s \in F$ tale che

$$(3.14) \quad \int_{\partial B(x, s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 \leq \frac{3\pi}{\varepsilon}.$$

Infatti se per assurdo fosse per ogni $s \in F$

$$\int_{\partial B(x, s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 > \frac{3\pi}{\varepsilon},$$

dal Lemma 3.3.4 si avrebbe che

$$\begin{aligned} 3\pi r &\geq \int_{B(x, r)} |\nabla u|^2 dx = \int_0^r \int_{\partial B(x, s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 ds \geq \int_F \int_{\partial B(x, s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 ds \\ &> \int_F \frac{3\pi}{\varepsilon} ds = \frac{3\pi}{\varepsilon} \varepsilon r = 3\pi r. \end{aligned}$$

Allora dalla disuguaglianza di Hölder è possibile dedurre che la costante di oscillazione di u su $B(x, s)$ è minore di $\nu = \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\varepsilon}}$. Infatti

$$\int_{\partial B(x, s)} |\nabla u| d\mathcal{H}^1 \leq \mathcal{H}^1(\partial B(x, s))^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B(x, s)} |\nabla u|^2 d\mathcal{H}^1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi s} \frac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\sqrt{6\pi}}{\sqrt{\varepsilon}} s^{\frac{1}{2}}.$$

Ora dal Lemma 2.2.1 è possibile trovare un ricoprimento localmente finito $(B_i)_{i \in I}$ di $K \cap D(R')$, con $B_i = B(x_i, s_i)$ tale che le palle $B(x_i, \frac{s_i}{5})$ siano disgiunte; da quanto appena detto è possibile supporre che per ogni B_i valga la Disuguaglianza (3.14): le prime due richieste della Definizione 3.4.1 sono quindi soddisfatte; mostriamo ora l'ultima.

Siccome K soddisfa la proprietà di Uniforme Densità, per ogni $i \in I$ abbiamo che

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x_i, s_i/5)) \geq \frac{\beta}{5} s_i,$$

che, assieme al fatto che le palle di raggio $s_i/5$ sono disgiunte e al Lemma 3.3.4, garantisce che

$$\sum_{i \in I} s_i \leq \frac{5}{\beta} \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(K \cap B(x_i, s_i/5)) \leq \frac{5}{\beta} \mathcal{H}^1(K \cap D(R)) \leq \frac{5}{\beta} 3\pi R = \frac{15\pi}{\beta} R.$$

Quindi $(B_i)_{i \in I}$ è un ricoprimento a piccola oscillazione con costante $\mu = \frac{15\pi}{\beta}$.

Ora, dalla proprietà di Uniforme Densità, applicata a $K \cap D(R/2)$, abbiamo che

$$R \leq \frac{2}{\beta} \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2))$$

e quindi, continuando la stima precedente,

$$\sum_{i \in I} s_i \leq \frac{30\pi}{\beta^2} \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)).$$

Allora, per la stima del Lemma 3.5.1 e poiché $s_i \leq \alpha R$ per ogni $i \in I$, esiste un $s \in [\frac{R}{2}, R]$ tale che

$$\begin{aligned} E(u_s, K(s)) - E(u, K) &\leq C(\mu, \nu) \sup_{i \in I} \left(\frac{s_i}{R} \right)^{\frac{1}{2}} \sum_{i \in I} s_i - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)) \\ &\leq C(\mu, \nu) \sqrt{\alpha} \frac{30\pi}{\beta^2} \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)) - \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)) = \\ &= \left(\frac{30\pi}{\beta^2} C(\mu, \nu) \sqrt{\alpha} - 1 \right) \mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)). \end{aligned}$$

È possibile quindi scegliere $\alpha > 0$ tale che il termine tra parentesi sia strettamente negativo, cosa che implicherebbe $E(u_s, K(s)) - E(u, K) < 0$. Ora, siccome K soddisfa la proprietà (M), questa cosa è possibile solo se $\mathcal{H}^1(K \cap D(R/2)) = 0$ e dall'essenzialità di K allora si deduce che $K \cap D(R/2) = \emptyset$, che è assurdo in quanto $x \in K \cap D(R/2)$. Quindi K soddisfa la proprietà di Uniforme Concentrazione. \square

Le proprietà di proiezione

Presentiamo ora due proprietà di proiezione che, per il Teorema 2.3.3, garantiranno che una segmentazione minimale è un insieme 1-rettificabile.

Sia $\theta \in \mathbb{S}^1$ e sia p_θ la proiezione ortogonale lungo la direzione θ .

Definizione 3.6.12 (Prima Proprietà di Proiezione). Diciamo che una segmentazione K soddisfa la *Prima Proprietà di Proiezione* se esiste una costante $\beta > 0$ tale che per ogni disco $D(R) = B(x, R) \subset \Omega$ con $x \in K$ e $0 < R \leq 1$ e per ogni $\theta \in \mathbb{S}^1$

$$\mathcal{H}^1(p_\theta(K \cap D(R))) + \mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(K \cap D(R))) \geq \beta R.$$

Osservazione 3.6.13. Se una segmentazione K soddisfa la Prima Proprietà di Proiezione, allora soddisfa anche la proprietà di Uniforme Densità.

Analogamente a quanto fatto con le proprietà di Uniforme Densità e di Concentrazione è possibile dare anche la seguente definizione, che è allo stesso modo legata a una Condizione di Atomizzazione (A'):

Definizione 3.6.14 (Seconda Proprietà di Proiezione). Diciamo che una segmentazione K soddisfa la *Seconda Proprietà di Proiezione* se per ogni $\varepsilon \geq 0$ esiste una costante $\alpha(\varepsilon)$ tale che ogni disco $D(R) = B(x, R) \subset \Omega$ con $x \in K$ e $0 < R \leq 1$ contiene un disco $D(r)$ con raggio $r \geq \alpha R$ e tale che per ogni $\theta \in \mathbb{S}^1$

$$\mathcal{H}^1(p_\theta(K \cap D(r)_\theta)) + \mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(K \cap D(r)_\theta)) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{2} r,$$

dove $D(R)_\theta$ è il quadrato aperto inscritto in $D(R)$ con un lato parallelo a θ .

Osservazione 3.6.15. Notiamo che la Seconda Proprietà di Proiezione implica automaticamente la Prima.

Definizione 3.6.16 (Condizione (A')). Diciamo che un sottoinsieme chiuso K di Ω soddisfa la *Condizione di Atomizzazione (A')*, su un disco $D(R)$ per due costanti α e ε positive se ogni disco $D(r)$ contenuto in $D(R)$ con $2r = \text{diam } D(r) \geq 2\alpha R$ esiste un $\theta \in \mathbb{S}^1$ tale che

$$\mathcal{H}^1(p_\theta(K \cap D(r)_\theta)) + \mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(K \cap D(r)_\theta)) \leq (1 - \varepsilon) \frac{\sqrt{2}}{2} r.$$

Osservazione 3.6.17. La condizione (A') e la Seconda Proprietà di Proiezione sono strettamente legate. Infatti un insieme K non soddisfa la Seconda Proprietà di Proiezione se e solo se esiste un $\varepsilon \geq 0$ tale che, per ogni α , la condizione (A') è soddisfatta in qualche disco. Questo è l'analogo di quanto abbiamo discusso nell'Osservazione 3.6.10.

Teorema 3.6.18. Supponiamo che K sia una segmentazione essenziale di Ω e tale che soddisfi la proprietà (M). Allora soddisfa anche la Seconda Proprietà di Proiezione. Inoltre, fissato $\varepsilon > 0$, la scelta della costante $\alpha(\varepsilon)$ non dipende da K .

Dimostrazione. La dimostrazione è simile a quella del Teorema 3.6.18: supponendo per assurdo che valga la condizione (A'), si procede a costruire un ricoprimento a piccola oscillazione di $K \cap D(R')$, dove $R' = (1 - \alpha)R$. Poi si mostra, utilizzando la stima del Lemma 3.5.1, che il centro del disco $D(R)$ fornito dall'atomizzazione non può stare in K , trovando l'assurdo. L'unica differenza è presente nella costruzione del ricoprimento a piccola oscillazione: per sfruttare la struttura della Seconda Proprietà di Proiezione vanno utilizzati quadrati con i lati allineati con il vettore $\theta \in \mathbb{S}^1$. Per maggiori dettagli, si veda il Teorema 15.27 di [9]. \square

Osservazione 3.6.19. Tutte le stime provate in questa sezione sono valide in un disco $D(R)$ contenuto in Ω . D'altra parte però abbiamo bisogno di stime di tipo globale e i prossimi teoremi richiedono di poter lavorare in maniera uniforme su tutto il dominio. Tra le varie alternative per risolvere questo inconveniente, adottiamo la seguente: siccome stiamo considerando insiemi K che non intersecano $\partial\Omega$, aggiungiamo a K l'intera frontiera. Questa modifica lascia invariante il problema di minimizzazione e rende automaticamente soddisfatte le stime vicino la frontiera. D'ora in poi supponiamo allora che K sia un 1-sottoinsieme chiuso di $\bar{\Omega}$ con $\partial\Omega \subset K$.

3.7 Esistenza di una segmentazione ottimale

Dalle proprietà che abbiamo visto nella precedente sezione, in particolare dalle due proprietà di proiezione, per il Teorema 2.3.3, abbiamo che K è un insieme rettificabile. La proprietà di Uniforme Densità è invece connessa con la seguente nozione:

Definizione 3.7.1 (Insiemi Ahlfors-regolari). Diciamo che un 1-sottoinsieme K di Ω è *Ahlfors-regolare* se esiste una costante c tale che per ogni disco $D(R)$ contenuto in Ω e centrato in K abbiamo che

$$c^{-1}R \leq \mathcal{H}^1(K \cap D) \leq cR.$$

Una segmentazione che soddisfa la proprietà (M) è infatti Ahlfors-regolare. Infatti una disuguaglianza deriva dalla proprietà di Uniforme Densità, mentre l'altra deriva dal Lemma 3.3.4. Viceversa un minimo del funzionale di Mumford-Shah preso tra gli insiemi Ahlfors-regolari soddisfa la proprietà (M). È quindi conveniente restringere la ricerca di un minimo per il Funzionale (3.1) nella classe \mathcal{K} degli 1-insiemi chiusi, rettificabili e Ahlfors-regolari. Infatti ogni elemento di \mathcal{K} può essere approssimato da un'unione finita di curve:

Teorema 3.7.2. Sia $K \in \mathcal{K}$ e sia $u = u_K$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un compatto K_ε unione di un insieme finito di supporti di curve rettificabili c_1, c_2, \dots, c_k e una funzione $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\Omega \setminus K_\varepsilon)$ tali che

$$\mathcal{H}^1(K \setminus K_\varepsilon) \leq \varepsilon$$

$$\sum_{j=1}^k \mathcal{H}^1(c_j) \leq \mathcal{H}^1(K) + \varepsilon$$

$$I(u_\varepsilon, K_\varepsilon) \leq I(u, K) + \varepsilon$$

e

$$d_H(K, K_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 2.3.4, siccome K è rettificabile, per ogni $\delta > 0$ esiste un insieme $H = \bigcup_{j=1}^k c_j$, dove le c_j sono curve rettificabili tali che

$$(3.15) \quad \sum_{j=1}^k \mathcal{H}^1(c_j) \leq \mathcal{H}^1(K) + \delta$$

e tale che

$$(3.16) \quad \mathcal{H}^1(K \setminus H) < \delta.$$

Siccome $\partial\Omega$ è un'unione finita di curve possiamo anche supporre che sia $\partial\Omega \subset H$.

Definiamo, per ogni $x \in K \setminus H$ la funzione $r(x) = d(x, H)$. Allora le palle $(B(x, r(x)))_{x \in K \setminus H}$ sono contenute in Ω e sono un ricoprimento di $K \setminus H$.

Ora dal Lemma 2.2.1 è possibile trovare un sottoricoprimento $(B_i)_{i \in I}$, con $B_i = B(x_i, r_i)$ tale che le palle $B(x_i, \frac{r_i}{5})$ sono disgiunte. La proprietà di Uniforme Densità ora garantisce che

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x_i, r_i/5)) \geq \beta \frac{r_i}{5} = \frac{1}{5c} r_i,$$

dove abbiamo posto $c = \beta^{-1}$. Possiamo allora stimare, dall'Equazione (3.16),

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \sum_{i \in I} r_i &\leq 5c \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(K \cap B(x_i, \frac{r_i}{5})) \leq 5c \mathcal{H}^1\left(K \cap \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \frac{r_i}{5})\right) \\ &\leq 5c \mathcal{H}^1(K \setminus H) \leq 5c\delta. \end{aligned}$$

Sia ora $\tilde{H} = H \cup (\bigcup_i \partial B_i)$. Possiamo modificare le curve c_j in maniera tale da ricoprire tutto l'insieme \tilde{H} : infatti, per ogni $i \in I$, si ha che ∂B_i interseca H e quindi una delle curve c_j ; allora modifichiamo c_j includendo il cerchio ∂B_i ; il Teorema di Ascoli-Arzelà ci garantisce che questa procedura numerabile ha termine.

Allora abbiamo che

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \sum_{j=1}^k \mathcal{H}^1(c_j) &\leq \mathcal{H}^1(K) + \delta + \sum_{i \in I} \mathcal{H}^1(\partial B_i) = \mathcal{H}^1(H) + \delta + \sum_{i \in I} 2\pi r_i \\ &\leq \mathcal{H}^1(K) + (1 + 10\pi c)\delta. \end{aligned}$$

Sia ora $A = \Omega \cap \bigcup_i B_i = \bigcup_i B_i$ e definiamo $v = 0$ su A e $v = u$ su $\Omega \setminus A$. Chiaramente siccome v è la restrizione di u su A , essa è una funzione in $H^1(\Omega \setminus \tilde{H})$. Stimiamo allora l'energia $I(v)$, tenendo conto del fatto che $|g| \leq 1$:

$$(3.19) \quad \begin{aligned} I(v) &= \int_{\Omega \setminus \tilde{H}} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Omega} (v - g)^2 dx \\ &= \int_{(\Omega \setminus K) \setminus A} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega \setminus A} (u - g)^2 dx + \int_A g^2 dx \\ &\leq I(u) + \mathcal{L}^2(A). \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ possiamo trovare dunque un δ sufficientemente piccolo che renda valide tutte le stime nella tesi del teorema; poniamo $K_\varepsilon = \tilde{H}$ e u_ε .

Per prima cosa, siccome $H \subset \tilde{H}$, dalla Disuguaglianza (3.16)

$$\mathcal{H}^1(K \setminus K_\varepsilon) = \mathcal{H}^1(K \setminus \tilde{H}) \leq \mathcal{H}^1(K \setminus H) \leq \delta,$$

deve essere $\delta \leq \varepsilon$. Inoltre, dalla Stima (3.18), deve essere anche

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + 10\pi c}$$

Poi sappiamo che la lunghezza ∂A ha lunghezza limitata da $10\pi c\delta$ e quindi, dalla disuguaglianza isoperimetrica e in particolare dal fatto che

$$\mathcal{L}^2(A) \leq C(\mathcal{H}^1(\partial A))^2 \leq C(10\pi c\delta)^2,$$

per ottenere $I(u_\varepsilon, K_\varepsilon) \leq I(u, K) + \varepsilon$ deve essere anche

$$\delta \leq \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{C}(10\pi c)}.$$

Infine, siccome è possibile supporre che tutte le curve c_j incontrino K in almeno un punto, abbiamo che

$$d_H(K, K_\varepsilon) \leq \sup_j \mathcal{H}^1(c_j \setminus K) + \sup_i r_i \leq \delta + 5\delta c,$$

e quindi deve essere anche

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{5c+1}.$$

Scegliendo quindi $\delta \leq \min \left\{ \varepsilon; \frac{\varepsilon}{1+10\pi c}; \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{C}(10\pi c)}; \frac{\varepsilon}{5c+1} \right\}$ il teorema è dimostrato. \square

Osservazione 3.7.3. Siccome $\mathcal{H}^1(K_\varepsilon) \leq \sum_{j=1}^k \mathcal{H}^1(c_j)$, il Teorema 3.7.2 afferma che

$$\begin{aligned} E(u_\varepsilon, K_\varepsilon) &= I(u_\varepsilon, K_\varepsilon) + \mathcal{H}^1(K_\varepsilon) \leq I(u_\varepsilon, K_\varepsilon) + \sum_{j=1}^k \mathcal{H}^1(c_j) \\ &\leq I(u, K) + \varepsilon + \mathcal{H}^1(K) + \varepsilon = E(u, K) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dunque è possibile supporre che le successioni minimizzanti per il funzionale E su \mathcal{K} siano costituite di un numero finito di curve, cioè che se $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(K_n) = \inf_{K \in \mathcal{K}} E(K),$$

allora ognuno dei K_n è unione di un numero finito di curve. Per dimostrare l'esistenza del minimo è utile pensare all'unione di un numero finito di curve come l'unione di un numero finito di insiemi chiusi connessi. In questo caso allora è possibile utilizzare una delle generalizzazioni del teorema di Gołab per avere la semicontinuità inferiore del termine di lunghezza $\mathcal{H}^1(K)$.

Teorema 3.7.4. Sia \mathcal{K}^m la famiglia dei sottoinsiemi di $\bar{\Omega}$ che sono un'unione di al più m insiemi chiusi connessi. Allora il funzionale di Mumford-Shah ha minimo su \mathcal{K}^m .

Dimostrazione. Sia $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione minimizzante per E su \mathcal{K}^m . Allora dal Teorema di Blaschke 2.1.2 esiste una sottosuccessione convergente per la distanza di Hausdorff a un insieme compatto \tilde{K}^m , unione al più di m insiemi chiusi connessi. Inoltre il Teorema di Gołab 2.4.2 ci garantisce che

$$\mathcal{H}^1(\tilde{K}^m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(K_n)$$

e quindi, ponendo $\tilde{K}^m = \tilde{K}^m \setminus \partial\Omega$,

$$\mathcal{H}^1(\tilde{K}^m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(K_n).$$

Ora, dal Lemma di Semicontinuità 3.2.4 abbiamo anche che

$$I(\tilde{K}^m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} I(K_n)$$

e quindi ne segue che

$$\inf_{K \in \mathcal{K}^m} E(K) \leq E(\tilde{K}^m) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} E(K_n) \rightarrow \inf_{K \in \mathcal{K}^m} E(K).$$

\square

Per trovare un minimo di $E(K)$ in \mathcal{K} vogliamo liberarci dalla dipendenza da m dell'insieme \tilde{K}^m . Ora, siccome l'energia $E(\tilde{K}^m)$ è minima nella classe \mathcal{K}^m e il Metodo di Escissione non aumenta il numero di componenti connesse (Osservazione 3.3.2), l'insieme \tilde{K}^m soddisfa la proprietà (M). Quindi per la Proposizione 3.6.2 e i Teoremi 3.6.6, 3.6.11 e 3.6.18 \tilde{K}^m è una segmentazione essenziale (dopo aver rimosso un insieme finito di curve costanti) e soddisfa le proprietà di Uniforme Densità, Uniforme Concentrazione e le Proprietà di Proiezione per varie costanti universali che non dipendono da $m \in \mathbb{N}$.

Possiamo allora dimostrare il risultato principale di questa tesi:

Teorema 3.7.5. Esiste una segmentazione $\bar{K} \in \mathcal{K}$ tale che

$$E(\bar{K}) = \inf_{K \in \mathcal{K}} E(K).$$

Dimostrazione. Sia, per ogni m fissato, \tilde{K}^m un minimo del problema di minimizzazione nella classe \mathcal{K}^m : esso esiste per il Teorema 3.7.4. Dal Teorema di Blaschke 2.1.2 abbiamo che, a meno di sottosuccessioni, \tilde{K}^m converge a un limite \bar{K} rispetto alla metrica di Hausdorff. Non possiamo applicare il Teorema di Gołab 2.4.2 in quanto i \tilde{K}^m non sono connessi; è possibile applicare però il Teorema 3.7.4: infatti dal fatto che per ogni m l'insieme \tilde{K}^m soddisfa la proprietà di Uniforme Concentrazione 3.6.7, è possibile trovare una sottosuccessione di $(\tilde{K}^m)_{m \in \mathbb{N}}$ uniformemente concentrata. Allora il Teorema 2.4.5 garantisce che

$$\mathcal{H}^1(\bar{K}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{H}^1(\tilde{K}^m).$$

Inoltre, per il Lemma di Semicontinuità 3.2.4, abbiamo anche che $I(\bar{K}) \leq I(\tilde{K}^m)$ e quindi

$$E(\bar{K}) \leq E(\tilde{K}^m).$$

Mostriamo ora che $K \in \mathcal{K}$. Siccome per ogni m l'insieme \tilde{K}^m soddisfa la Prima Proprietà di Proiezione con una costante β che non dipende da m e per la semicontinuità superiore della misura di Hausdorff nei sottoinsiemi di \mathbb{R} di misura finita (Teorema 2.4.1), abbiamo che

$$\begin{aligned} \beta R &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\mathcal{H}^1(p_\theta(\tilde{K}^m \cap D(R))) + \mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(\tilde{K}^m \cap D(R))) \right] \\ &\leq \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\mathcal{H}^1(p_\theta(\tilde{K}^m \cap D(R))) \right] + \limsup_{m \rightarrow \infty} \left[\mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(\tilde{K}^m \cap D(R))) \right] \\ &\leq \mathcal{H}^1(p_\theta(\bar{K} \cap D(R))) + \mathcal{H}^1(p_{\theta^\perp}(\bar{K} \cap D(R))). \end{aligned}$$

Quindi \bar{K} soddisfa la Prima Proprietà di Concentrazione, quindi la proprietà di Uniforme Densità e dunque è un insieme di Ahlfors regolare; siccome inoltre soddisfa la proprietà (M), è un insieme rettificabile e quindi $\bar{K} \in \mathcal{K}$.

Quindi abbiamo che

$$\inf_{K \in \mathcal{K}} E(K) \leq E(\bar{K}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} E(\tilde{K}^m) \rightarrow \inf_{K \in \mathcal{K}} E(K)$$

e pertanto $E(\bar{K}) = \min_{K \in \mathcal{K}} E(K)$. □

Bibliografia

- [1] M. Abate e F. Tovena. *Curve e superfici*. UNITEXT. Springer Milan, 2007.
- [2] L. Ambrosio, N. Fusco e D. Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Mathematical Monographs. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 2000.
- [3] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Universitext. Springer-Verlag New York, 1 edition, 2010.
- [4] G. David. *Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional*. Progress in Mathematics. Birkhauser Basel, 1 edition, 2005.
- [5] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2010.
- [6] L. C. Evans e R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Textbooks in Mathematics. Chapman and Hall/CRC Press, 2015.
- [7] K. J. Falconer. *The Geometry of Fractal Sets*. Cambridge University Press, 1985.
- [8] P. Mattila. *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces: Fractals and Rectifiability*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1995.
- [9] J. M. Morel e S. Solimini. *Variational Methods in Image Segmentation*. Birkhauser Boston Inc., Cambridge, MA, USA, 1995.
- [10] D. Mumford e J. Shah. Boundary detection by minimizing functionals. *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, San Francisco, 1985.
- [11] D. Mumford e J. Shah. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 42(5):577–685, 1989.