

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Dipartimento di Matematica Tullio Levi-Civita

Corso di Laurea Triennale in Matematica

**CONGETTURA DI RAYLEIGH:
LA MIGLIOR FORMA PER UN TAMBURRO**

RELATORE:

Prof. Monti Roberto

LAUREANDO:

Massenz Davide
1201624

*Anno Accademico 2020/2021
24 Settembre 2021*

Indice

Introduzione	3
1 Formulazione del problema	5
1.1 Equazione di D’Alambert per la membrana vibrante	5
1.2 Risoluzione formale col metodo di separazione delle variabili .	6
1.3 Richiami di analisi funzionale e teoria spettrale	7
1.4 Spettro del Laplaciano	10
1.5 Definizione della frequenza fondamentale	17
2 Riformulazione del problema in termini variazionali	19
2.1 Metodo diretto del Calcolo delle Variazioni	20
2.2 Esistenza del minimo del quoziente di Rayleigh in H_0^1	21
2.3 $\lambda(A)$ è il minimo del quoziente di Rayleigh	23
3 Risoluzione del problema	25
3.1 Richiami della teoria geometrica della misura	25
3.2 Simmetrizzazione di Schwarz	27
3.3 Disuguaglianza di Faber-Krahn	33
Bibliografia	35

Introduzione

La congettura di Lord Rayleigh sulla frequenza fondamentale di una membrana elastica formulata nel 1877, dimostrata successivamente da George Faber nel 1923 e da Edgar Krahn nel 1925, afferma che una membrana vibrante fissata al bordo e di area data ha la più bassa frequenza fondamentale di vibrazione se e solo se è circolare. In ambito musicale ciò significa che tra tutti i tamburi di forma variabile e area fissata quello che produce la nota più bassa è quello circolare.

Questo problema è uno dei cosiddetti “problemi isoperimetrici” della fisica matematica, cioè problemi che possono essere formulati in termini variazionali in cui si cerca di ottimizzare un funzionale che dipende da un insieme o da una funzione. Si basano infatti sulla disuguaglianza isoperimetrica la quale permette di concludere che il funzionale è ottimizzato in corrispondenza di un oggetto opportunamente simmetrico.

L’obiettivo di questa tesi è di studiare la dimostrazione di tale congettura. La membrana vibrante del tamburo viene descritta da una funzione che soddisfa l’equazione di D’Alembert delle onde con delle condizioni al bordo. Dopo aver risolto tale equazione ed aver trovato le possibili soluzioni si definirà la frequenza fondamentale. In seguito il problema verrà riformulato in termini variazionali, in particolare si dimostrerà che il quadrato della frequenza fondamentale è il minimo di un funzionale detto quoziente di Rayleigh. Infine si dimostrerà attraverso la disuguaglianza di Faber-Krahn che la frequenza fondamentale è minima se la membrana è circolare. In quest’ultima parte si utilizzerà la simmetrizzazione di Schwarz che si basa su alcuni risultati di teoria geometrica della misura come la formula di coarea e la disuguaglianza isoperimetrica.

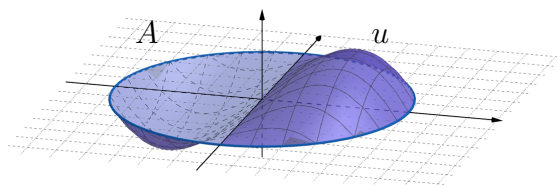
Capitolo 1

Formulazione del problema

1.1 Equazione di D'Alembert per la membrana vibrante

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un insieme aperto limitato con $\mathcal{L}^2(A)$ fissata area e sia u una funzione $u : \bar{A} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in $C(\bar{A} \times \mathbb{R}) \cap C^2(A \times \mathbb{R})$ che verifica il dato al bordo $u(x, t) = 0$ per ogni $x \in \partial A$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$.

Il valore $u(x, t)$ rappresenta l'altezza della membrana nel punto $x \in A$ al tempo $t \in \mathbb{R}$ e quindi il grafico della funzione u rappresenta una membrana vibrante.



La funzione u deve soddisfare, in quanto membrana vibrante, l'equazione delle onde di D'Alembert:

$$\begin{cases} \Delta u = u_{tt} & x \in A \text{ e } t \in \mathbb{R}, \\ u(x, t) = 0 & x \in \partial A \text{ e } t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Sopra Δ è l'operatore di Laplace, o Laplaciano, così definito in \mathbb{R}^n (nel nostro caso sarà $n = 2$):

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Per un approfondimento sull'equazione delle onde si rimanda al capitolo 5 di [1]. Il problema è allora così formulato: per una fissata $\mathcal{L}^2(A) > 0$, qual è la miglior forma di A per avere la frequenza fondamentale più bassa?

Dopo aver definito la frequenza fondamentale, successivamente studieremo quando essa è minima.

1.2 Risoluzione formale col metodo di separazione delle variabili

Risolviamo ora il problema della membrana vibrante mediante il metodo di separazioni delle variabili. Cerchiamo quindi soluzioni della forma $u(x, t) = f(x) \cdot g(t)$, con $f : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Abbiamo perciò:

$$\Delta u = \Delta f \cdot g \quad \text{e} \quad u_{tt} = f \cdot g_{tt}.$$

Sostituendo otteniamo quindi:

$$\begin{cases} \Delta f \cdot g = f \cdot g_{tt} & \text{in } A \times \mathbb{R} \\ f = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases}$$

Ora, assumendo $f \neq 0$ e $g \neq 0$, si ha

$$\Delta f \cdot g = f \cdot g_{tt} \implies \frac{\Delta f}{f} = \frac{g_{tt}}{g}.$$

Siccome $\frac{\Delta f}{f}$ dipende da x ma $\frac{g_{tt}}{g}$ è costante nella x esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\Delta f = -\lambda \cdot f$ e $g_{tt} = -\lambda \cdot g$. Abbiamo ottenuto quindi il seguente sistema:

$$\begin{cases} \Delta f = -\lambda \cdot f & x \in A \\ f = 0 & \text{su } \partial A \\ g_{tt} = -\lambda \cdot g & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (\text{S1})$$

Quindi λ è un autovalore di $-\Delta$ con dato al bordo di Dirichlet su A con autofunzione f (daremo una definizione precisa di questa affermazione nelle prossime sezioni). Per risolvere questo sistema dobbiamo studiare lo spettro del Laplaciano e per fare ciò ci servono prima alcuni risultati di analisi funzionale e di teoria spettrale.

1.3 Richiami di analisi funzionale e teoria spettrale

Richiamiamo ora alcuni risultati noti di analisi funzionale e di teoria spettrale che utilizzeremo nei prossimi capitoli. Per approfondire si veda [2] e [3].

Definizione 1.1 (Spazi di Sobolev). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$, con $n \geq 1$, un insieme aperto e sia $1 \leq p \leq \infty$. Lo spazio di Sobolev $W^{1,p}(A)$ è lo spazio delle funzioni f tali che:

- $f \in L^p(A)$,
- esistono $g_1, \dots, g_n \in L^p(A)$ tali che $\int_A f(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_A g_i(x) \phi(x) dx$ per ogni $i = 1, \dots, n$ e per ogni $\phi \in C_c^\infty(A)$.

Chiameremo $\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i \in L^p(A)$, $i = 1, \dots, n$, le derivate parziali deboli di f , mentre indicheremo con $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n})$ il gradiente debole di f .

Con la seguente norma

$$\|f\|_{W^{1,p}(A)} = \|f\|_{1,p} = \|f\|_{L^p(A)} + \|\nabla f\|_{L^p(A)},$$

lo spazio $W^{1,p}(A)$ risulta essere uno spazio di Banach separabile e riflessivo.

Lo spazio $W_0^{1,p}(A) \subset W^{1,p}(A)$ è lo spazio delle funzioni $f \in W^{1,p}(A)$ che sono nulle su ∂A (nel senso della traccia di u), più precisamente:

$$W_0^{1,p}(A) = \overline{C_c^\infty(A)}^{\|\cdot\|_{W^{1,p}(A)}}.$$

Le funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ sono dense in $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ma per un generico insieme A ciò non vale. Quindi $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, ma in generale $W_0^{1,p}(A) \neq W^{1,p}(A)$.

Notazione: quando $p = 2$ si usano le seguenti notazioni: $H^1(A) = W^{1,2}(A)$, $H_0^1(A) = W_0^{1,2}(A)$.

Osservazione: Su $H_0^1(A)$ sono definite le norme $\|\cdot\|_{H_0^1(A)}$, che deriva dalla norma $\|\cdot\|_{W^{1,2}(A)}$, e la norma $\|u\|_{1,0} = \|\nabla u\|_{L^2(A)}$ che deriva dal prodotto scalare $(u, v)_{1,0} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(A)}$. Notare che $\|\cdot\|_{1,0}$ è una norma e non solo una seminorma su $H_0^1(A)$ perché $\|u\|_{1,0} = 0 \Rightarrow |\nabla u| = 0$ q.o. $\Rightarrow u$ costante $\Rightarrow u = 0$, dove nell'ultima implicazione si è usato che u è nulla su ∂A . Nel caso in cui A è limitato, si può dimostrare facilmente utilizzando la seguente disuguaglianza di Poincaré che queste due norme sono equivalenti. Inoltre $H_0^1(A)$ con la sua norma è uno spazio di Banach riflessivo e separabile.

Su $W^{1,p}(A)$ sono definite la topologia forte, dovuta alla norma, e la topologia debole. La convergenza debole in $W^{1,p}(A)$ è caratterizzata nel seguente modo:

siano $f, f_h \in W^{1,p}(A)$, $h \in \mathbb{N}$, f_h converge debolmente a f in $W^{1,p}(A)$, $f_h \rightharpoonup f$, se valgono le seguenti:

- $\int_A f_h \phi \, dx \rightarrow \int_A f \phi \, dx$ per ogni $\phi \in L^q(A)$ ($f_h \rightharpoonup f$ in $L^p(A)$),
- $\int_A \frac{\partial f_h}{\partial x_i} \phi \, dx \rightarrow \int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \phi \, dx$ per ogni $\phi \in L^q(A)$ e per ogni $i = 1, \dots, n$ ($\nabla f_h \rightharpoonup \nabla f$ in $L^p(A)$),

dove q è l'esponente coniugato di p .

In particolare $f_h \rightharpoonup f$ in H^1 se $f_h \rightharpoonup f$ in $L^2(A)$ e $\nabla f_h \rightharpoonup \nabla f$ in $L^2(A)$.

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Poincaré, caso $p = 2$). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, con $n \geq 1$. Allora esiste $C(A, n)$, costante di Poincaré che dipende solo da n e da A , tale che per ogni $u \in H_0^1(A)$:

$$\|u\|_{L^2(A)} \leq C(A, n) \|\nabla u\|_{L^2(A)}.$$

Dimostrazione. Caso $n=1$.

Nel caso in cui A è un intervallo limitato, $A = (a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$, vale il teorema fondamentale del calcolo integrale. Per ogni $x \in (a, b)$ si ha, poiché $u(a) = 0$, che vale:

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_1,$$

cioè $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$ e quindi usando la disuguaglianza di Hölder con $p = q = 2$ otteniamo:

$$\|u\|_\infty^2 \leq \left(\int_a^b |u'(s)| ds \right)^2 \leq \int_a^b (u'(s))^2 ds \int_a^b 1^2 ds = C(A, 1) \cdot \|u'\|_2^2,$$

con $C(A, 1) = b - a > 0$. Concludendo:

$$\begin{aligned} \|u\|_2^2 &= \int_a^b |u|^2 dx \leq \int_a^b \|u\|_\infty^2 dx = \|u\|_\infty^2 \int_a^b 1 dx \\ &= C(A, 1) \cdot \|u\|_\infty^2 \leq C(A, 1)^2 \cdot \|u'\|_2^2. \end{aligned}$$

Applicando la radice quadrata ad ambo i membri si ottiene la tesi.

Caso generale.

Supponiamo per assurdo non valga la disuguaglianza. Allora per ogni $C(A, n) = j \in \mathbb{N}$ esiste $u_j \in H_0^1(A)$ tale che $\|u_j\|_2 > j \|\nabla u_j\|_2$.

Si può supporre che $\|u_j\|_{1,2} = 1$ per ogni j (la disuguaglianza continua a valere per $v_j = u_j/\|u\|_{1,2}$), quindi esiste una sottosuccessione che denotiamo sempre con $(u_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $u_j \rightharpoonup u$ in H^1 , ovvero $u_j \rightharpoonup u$ in L^2 e $\nabla u_j \rightharpoonup \nabla u$ in L^2 (si veda il Corollario III.27 di [3]). Dalla disuguaglianza si ha però che:

$$\|\nabla u_j\|_2 < \|u_j\|_2/j \leq 1/j \rightarrow 0,$$

e sfruttando la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole (vedi sezione 2.2, Teorema 2.4) si ottiene $\|\nabla u\|_2 \leq \liminf \|\nabla u_j\|_2 = 0$ che implica $\nabla u = 0$. Pertanto su ogni componente connessa di A u è costante, ma poiché u deve tendere a zero sul bordo di ciascuna di esse ne segue che $u = 0$, ma ciò è in contraddizione col fatto che $\|u\|_2 = 1$ ($\|u_j\|_2 = \|u_j\|_{1,2} - \|\nabla u_j\|_2 \rightarrow 1 - 0 = 1$). \square

Teorema 1.2 (Teorema di rappresentazione di Riesz). Sia H uno spazio di Hilbert. Allora per ogni $T \in H'$ esiste unico $x_T \in H$ tale che per ogni $y \in H$ si ha $T(y) = (x_T, y)$.

Per la dimostrazione si veda il Teorema V.5 di [3].

Teorema 1.3 (Teorema di Rellich-Kondrachov per W_0^1). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato, con $n \geq 1$. Allora si ha:

- se $1 \leq p < n$, $W_0^{1,p}(A) \hookrightarrow L^q(A)$ per ogni $q \in [1, p^*)$ dove $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;
- se $p = n$, $W_0^{1,p}(A) \hookrightarrow L^q(A)$ per ogni $q \in [1, \infty)$;
- se $p > n$, $W_0^{1,p}(A) \hookrightarrow C(\bar{A})$.

Dove \hookrightarrow è il simbolo di immersione compatta, ovvero $X \hookrightarrow Y$ se e solo se X si immerge con continuità in Y (esiste $C > 0$ tale che $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ per ogni $x \in X$) e l'applicazione identità $i : X \rightarrow Y$ è compatta.

Per la dimostrazione si veda il Teorema IX.16 e l'osservazione 21 in §9 di [3].

Osservazione: Noi utilizzeremo l'immersione compatta di $H_0^1(A)$ in $L^2(A)$.

Teorema 1.4. Siano E, F, G tre spazi di Banach e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $S \in \mathcal{L}(F, G)$. Se S è compatto allora lo è pure $S \circ T$.

Per la dimostrazione si veda la Proposizione VI.3 di [3].

Definizione 1.2 (Base Hilbertiana). Sia H uno spazio di Hilbert e $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ una successione di elementi di H , con \mathcal{A} non necessariamente numerabile. Si dice che $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ è una base Hilbertiana di H se valgono:

- $\|u\|_\alpha = 1$ e $(u_\alpha, u_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$,
- $\overline{\langle u_\alpha : \alpha \in \mathcal{A} \rangle} = H$.

Teorema 1.5 (Teorema di Hilbert - Schmidt). Sia H uno spazio di Hilbert separabile e $T \in \mathcal{L}(H)$ un operatore compatto, autoaggiunto e strettamente positivo. Allora esistono una successione $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di autovettori di T e una successione di autovalori reali strettamente positivi $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ associati ad essi, cioè $T(e_n) = \lambda_n e_n$, e di molteplicità finita tali che:

1. $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana numerabile di H ,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0$.

Per la dimostrazione si vedano i Teoremi VI.8 e VI.11 di [3].

Teorema 1.6 (Sviluppo in serie di Fourier). Sia H uno spazio di Hilbert ed $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana di H . Allora per ogni $x \in H$ vale lo sviluppo in serie di Fourier, ovvero:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} (x, e_k) e_k$$

rispetto alla norma di H .

Per la dimostrazione si veda il Teorema V.9 di [3] utilizzando la definizione di base Hilbertiana.

1.4 Spettro del Laplaciano

Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato con $n \geq 1$ e sia $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Consideriamo il problema di Dirichlet omogeneo, ossia con dato 0 al bordo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{su } A \\ u = 0 & \text{su } \partial A. \end{cases} \quad (\text{DO})$$

Definizione 1.3. Data $f \in C(A, \mathbb{R})$, u si dice soluzione classica del problema (DO) se $u \in C^2(A, \mathbb{R}) \cap C(\bar{A}, \mathbb{R})$ e verifica il problema.

Definizione 1.4. Data $f \in L^2(A)$. Una funzione $u: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice soluzione debole del problema se e solo se $u \in H_0^1(A)$ e per ogni $v \in H_0^1(A)$ risulta che:

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_A f v \, dx.$$

Osservazione: Viene data questa definizione perché, se $\Delta u \in L^2(A)$ esiste, risulta equivalente alla seguente:

$$\int_A -\Delta u v \, dx = \int_A f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(A).$$

Infatti utilizzando la formula di Gauss-Green si ha

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = - \int_A \Delta u v \, dx + \int_{\partial A} \frac{\partial u}{\partial n} v \, d\sigma = - \int_A \Delta u v \, dx,$$

ove nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che v è nulla al bordo.

Osservazione: Data $u \in H_0^1(A)$ si può dimostrare facilmente che se u è soluzione classica è anche soluzione debole, ma non viceversa. Tuttavia vale che se $f \in C(\bar{A})$ e u è soluzione debole tale che $u \in C^2(A, \mathbb{R}) \cap C(\bar{A}, \mathbb{R})$ allora u è soluzione classica.

Teorema 1.7. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$. Allora per ogni $f \in L^2(A)$ esiste una ed una sola $u \in H_0^1(A)$ soluzione debole del problema (DO).

Dimostrazione. Sia $f \in L^2(A)$. Si consideri l'applicazione lineare:

$$v \in H_0^1(A) \rightarrow \int_A f v \, dx \in \mathbb{R}.$$

Tale operatore è limitato, infatti utilizzando la disuguaglianza di Hölder e quella di Poincaré (Teorema 1.1) si ha che:

$$\left| \int_A f v \, dx \right| \leq \|f\|_{L^2(A)} \|v\|_{L^2(A)} \leq C(A, n) \|f\|_{L^2(A)} \|v\|_{1,0}.$$

Ora per il Teorema di rappresentazione di Riesz (Teorema 1.2) esiste un unico elemento $u \in H_0^1(A)$ tale che per ogni $v \in H_0^1(A)$ si ha:

$$\int_A f v \, dx = (u, v)_{1,0} = \int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

e cioè esiste una ed una sola $u \in H_0^1(A)$ soluzione debole del problema. \square

Questo teorema ci assicura che la seguente definizione è ben posta:

Definizione 1.5. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Sia $T_D : L^2(A) \rightarrow H_0^1(A)$ il funzionale così definito: per $f \in L^2(A)$ poniamo $T_D f := u \in H_0^1(A)$, ove u è l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet (DO) relativo a f .

Teorema 1.8. T_D è un operatore lineare limitato da $L^2(A)$ in $H_0^1(A)$. Inoltre:

$$\|T_D\|_{\mathcal{L}(L^2(A), H_0^1(A))} \leq C(A, n),$$

dove $C(A, n)$ è la costante di Poincaré.

Dimostrazione. La linearità di T_D è data dalla linearità del problema di Dirichlet.

Limitatezza: sia $f \in L^2(A)$ non nulla e sia $u = T_D f \neq 0$. Poiché u è soluzione debole, allora per ogni $v \in H_0^1(A)$ si ha che:

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_A f v \, dx.$$

In particolare se $u = v$, utilizzando la disuguaglianza di Hölder e quella di Poincaré abbiamo che:

$$\begin{aligned} \|u\|_{1,0}^2 &= \int_A \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \int_A f u \, dx \leq \|f\|_{L^2(A)} \|u\|_{L^2(A)} \\ &\leq C(A, n) \|f\|_{L^2(A)} \|u\|_{1,0} \end{aligned}$$

Quindi si ha:

$$\|u\|_{1,0} \leq C(A, n) \|f\|_{L^2(A)} \Rightarrow \|T_D f\|_{1,0} = \|u\|_{1,0} \leq C(A, n) \|f\|_{L^2(A)},$$

ossia $T_D \in \mathcal{L}(L^2(A), H_0^1(A))$ e vale $\|T_D\|_{\mathcal{L}(L^2(A), H_0^1(A))} \leq C(A, n)$ \square

Definizione 1.6. Sia $i : H_0^1(A) \rightarrow L^2(A)$ l'inclusione canonica. Definiamo:

$$T'_D := i \circ T_D : L^2(A) \rightarrow L^2(A).$$

Teorema 1.9. Si ha che $T'_D \in \mathcal{L}(L^2(A))$, e vale:

$$\|T'_D\|_{\mathcal{L}(L^2(A))} \leq C(A, n)^2.$$

Inoltre esso è un operatore compatto autoaggiunto e strettamente positivo.

Dimostrazione. • $T'_D \in \mathcal{L}(L^2(A))$ in quanto composizione di operatori lineari e limitati. Inoltre dalla proposizione precedente e dalla disuguaglianza di Poincaré, presa $f \in L^2(A)$, abbiamo che:

$$\begin{aligned} \|T'_D f\|_{L^2(A)} &= \|(i \circ T_D) f\|_{L^2(A)} = \|i(T_D f)\|_{L^2(A)} \\ &\leq C(A, n) \|T_D f\|_{1,0} \leq C(A, n)^2 \|f\|_{L^2(A)}, \end{aligned}$$

da cui si deduce $\|T'_D\|_{\mathcal{L}(L^2(A))} \leq C(A, n)^2$.

- **Compattezza.** Dalla proposizione precedente sappiamo che T_D è un operatore lineare e limitato da $L^2(A)$ in $H_0^1(A)$, inoltre dal Teorema 1.3 di Rellich-Kondrachov sappiamo che $H_0^1(A)$ si immerge con compattezza in $L^2(A)$, ovvero $i : H_0^1(A) \rightarrow L^2(A)$ è un operatore compatto. Poichè $T'_D := i \circ T_D : L^2(A) \rightarrow L^2(A)$, dal Teorema 1.4 abbiamo che T'_D è compatto.

- **Autoaggiunzione.** Siano $f, g \in L^2(A)$. Posti $u = T'_D f \in H_0^1(A)$ e $v = T'_D g \in H_0^1(A)$, utilizzando la definizione di soluzione debole, abbiamo che:

$$(T'_D f, g)_{L^2(A)} = \int_A u g \, dx = \int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

$$(f, T'_D g)_{L^2(A)} = \int_A f v \, dx = \int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx,$$

cioè $(T'_D f, g)_{L^2(A)} = (f, T'_D g)_{L^2(A)}$.

- T'_D è strettamente positivo. Presa $f \in L^2(A)$ e posto $u = T'_D f$ abbiamo che:

$$(T'_D f, f)_{L^2(A)} = \int_A u f \, dx = \int_A \nabla u \cdot \nabla u \, dx = \|u\|_{1,0}^2 \geq 0.$$

Quindi T'_D è positivo. Inoltre se $(T'_D f, f) = 0$, allora risulta $\|u\|_{1,0} = 0$ e per la disuguaglianza di Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(A)} \leq C(A, n) \|u\|_{1,0} = 0,$$

quindi $u = 0$ è la soluzione del problema (DO). Essendo $u = 0 \in C^2(A, \mathbb{R}) \cap C(\bar{A}, \mathbb{R})$ allora u è anche soluzione classica e pertanto necessariamente $f = 0$. Quindi T'_D è strettamente positivo. \square

D'ora in poi, nel caso in cui non vi siano ambiguità, indicheremo con T_D sia l'operatore da $L^2(A)$ in $H_0^1(A)$ che l'operatore da $L^2(A)$ in sé.

Teorema 1.10. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato. Allora:

1. Esistono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana di $L^2(A)$ ed una successione $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di autovalori strettamente positivi di T_D , di molteplicità finita, tali che e_n è un autovettore relativo a λ_n per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ e vale $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$.

2. Per ogni $f \in L^2(A)$, la funzione $u \in L^2(A)$ definita come:

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f)_{L^2(A)} e_n$$

è l'unica soluzione debole di problema di Dirichlet (DO).

Dimostrazione. 1. Sia $f \in L^2(A)$. Per il Teorema 1.9 l'operatore T_D è compatto, autoaggiunto e strettamente positivo su $L^2(A)$. Per il Teorema 1.5 di Hilbert-Schmidt esiste una base Hilbertiana $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di $L^2(A)$ e una successione $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di autovalori reali strettamente positivi tali che $\lambda_n \rightarrow 0$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $T_D e_n = \lambda_n e_n$. Quindi possiamo ordinare la successione di autovalori in modo che valga $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Infine λ_n ha molteplicità finita per ogni $n \in \mathbb{N}$.

2. Fissata $f \in L^2(A)$, per il Teorema 1.6 di sviluppabilità in serie di Fourier abbiamo che:

$$f := \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(A)} e_n$$

da cui applicando T_D otteniamo:

$$T_D f := \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(A)} T_D e_n = \sum_{n=1}^{\infty} (e_n, f)_{L^2(A)} \lambda_n e_n,$$

Pertanto, ponendo $u = T_D f$, rispetto alla norma di $L^2(A)$ abbiamo che la funzione

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (e_n, f)_{L^2(A)} e_n$$

è l'unica soluzione debole del problema di Dirichlet. □

Definizione 1.7. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato. Chiameremo autovalore dell'operatore $-\Delta$ in A con condizioni di Dirichlet al bordo, un numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{su } A \\ u = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

ammetta una soluzione debole non nulla, ovvero esista $u \in H_0^1(A)$ con $u \neq 0$ tale che per ogni $v \in H_0^1(A)$ si ha che:

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_A uv \, dx.$$

Tale u , si dice autovettore o autofunzione relativa a λ di $-\Delta$.

Teorema 1.11. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovalore di $-\Delta$ allora $\lambda > 0$.

Dimostrazione. Non può essere $\lambda = 0$ perché l'unica soluzione debole del problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{su } A \\ u = 0 & \text{su } \partial A \end{cases}$$

è $u = 0$. Sia quindi $\lambda \neq 0$ e $u \neq 0$ il relativo autovettore. Abbiamo perciò

$$0 < \|u\|_{1,0} = \int_A |\nabla u|^2 dx = \lambda \int_A |u|^2 dx = \lambda \|u\|_{L^2(A)}.$$

Siccome $\|u\|_{L^2(A)} > 0$ otteniamo $\lambda > 0$. \square

Teorema 1.12. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto limitato e $\lambda > 0$. Allora sono equivalenti le seguenti affermazioni:

1. λ è un autovalore per $-\Delta$;
2. λ^{-1} è un autoralore per T_D .

Inoltre $u \in H_0^1(A)$ è un autovettore relativo a λ per $-\Delta$ se e solo se u è un autovettore relativo a λ^{-1} per T_D .

Dimostrazione. Siano $\lambda > 0$ e $u \in H_0^1(A)$. λ è autovalore per $-\Delta$ e u è autovettore relativo a λ se e solo se per ogni $v \in H_0^1(A)$ vale

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla v dx = \lambda \int_A u \cdot v dx.$$

Da cui, essendo $\lambda \neq 0$ e per la linearità di ∇ otteniamo:

$$\int_A u \cdot v dx = \lambda^{-1} \int_A \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_A \nabla (\lambda^{-1}u) \cdot \nabla v dx$$

il che è equivalente a dire che $T_D u = \lambda^{-1}u$, cioè λ^{-1} è un autovalore per T_D e u è un autovettore relativo a λ^{-1} . Tutti i passaggi della dimostrazione sono delle equivalenze e quindi segue la tesi. \square

Teorema 1.13. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme aperto e limitato. Allora autovettori associati ad autovalori distinti di $-\Delta$ sono ortogonali rispetto al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_{1,0}$.

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu > 0$ due autovalori distinti di $-\Delta$ e siano $u, v \in H_0^1(A)$ i relativi autovettori rispettivamente di λ e μ .

Dimostriamo che $(u, v)_{1,0} = 0$. Per il Teorema 1.12 λ^{-1} e μ^{-1} sono autovalori distinti di T_D e u e v sono autovettori relativi rispettivamente a λ^{-1} e μ^{-1} . Essendo T_D autoaggiunto, autovettori relativi ad autovalori distinti di T_D sono ortogonali per il prodotto scalare di $L^2(A)$. Da ciò e dalla definizione di autovalore di $-\Delta$ otteniamo quindi:

$$(u, v)_{1,0} = \int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \lambda \int_A uv \, dx = \lambda(u, v)_{L^2(A)} = 0.$$

□

Teorema 1.14. Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato. Allora:

1. Esistono una base Hilbertiana $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di $L^2(A)$, con $e_n \in H_0^1(A)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ed una successione $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di autovalori strettamente positivi di molteplicità finita tali che $-\Delta e_n = \mu_n e_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $\mu_n \rightarrow \infty$ e vale $\mu_i \leq \mu_{i+1} \forall i \in \mathbb{N}$.
2. La successione $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$.

Dimostrazione. 1. Dal Teorema 1.10, esistono $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una base Hilbertiana di $L^2(A)$, con $e_n \in H_0^1(A)$ ($T_D e_n = \lambda_n e_n \in H_0^1(A)$ per definizione di soluzione debole e, siccome $\lambda_n \neq 0$, $e_n = T_D e_n / \lambda_n \in H_0^1(A)$) ed una successione $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ di autovalori strettamente positivi di T_D di molteplicità finita tali che per ogni n vale

$$T_D e_n = \lambda_n e_n.$$

Inoltre $\lambda_n \rightarrow 0$ e $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$. Poniamo $\mu_n := \lambda_n^{-1}$. Quindi $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty$ ed inoltre vale $\mu_n \leq \mu_{n+1}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Dal Teorema 1.12 abbiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ μ_n è un autovalore per $-\Delta$ e poiché e_n è un autovettore relativo a λ_n per l'operatore T_D , allora è pure un autovettore relativo a μ_n per l'operatore $-\Delta$. In più μ_n ha molteplicità finita poiché λ_n ha molteplicità finita.

2. Proviamo che la successione $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è formata da tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$.

Supponiamo per assurdo che esista $\mu > 0$ autovalore di $-\Delta$ tale che risulti $\mu \neq \mu_n$ per ogni n . Allora esiste $u \in H_0^1(A)$ con $u \neq 0$, autovettore relativo a μ . Dal Teorema 1.13 sappiamo che $(u, e_n)_{1,0} = 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, ovvero, per la definizione di autovalore di $-\Delta$:

$$(u, e_n)_{1,0} = \int_A \nabla u \cdot \nabla e_n \, dx = \mu \int_A u \cdot e_n \, dx = \mu(u, e_n)_{L^2(A)} = 0.$$

Poiché $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana di $L^2(A)$ allora $u = 0$, ma questo è in contraddizione con le ipotesi. Perciò gli elementi della successione $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sono tutti e soli gli autovalori di $-\Delta$. □

1.5 Definizione della frequenza fondamentale

Riassumendo la sezione precedente, abbiamo che esistono una sequenza crescente di autovalori di $-\Delta$ $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $\lambda_n > 0$ e $\lambda_n \rightarrow \infty$ ed una famiglia di autofunzioni $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(A)$ tali che $-\Delta f_n = \lambda_n f_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una base Hilbertiana di $L^2(A)$.

Quindi il sistema (S1) diventa il seguente:

$$\begin{cases} \Delta f_n = -\lambda_n \cdot f_n & x \in A \\ f_n = 0 & \text{su } \partial A \\ \partial_{tt} g_n = -\lambda_n \cdot g_n & t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Essendo $\lambda_n > 0$, le soluzioni dell'ultima equazione sono, al variare di due costanti reali A_n e B_n , le seguenti:

$$g_n = A_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} \cdot t) + B_n \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot t).$$

Quindi $\sqrt{\lambda_n}$ è la frequenza della funzione $u_n = f_n \cdot g_n$.

Notare che abbiamo trovato solo le soluzioni che sono a variabili separabili, ma utilizzando la linearità del problema e il fatto che le $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ formano una base Hilbertiana di $L^2(A)$, per il principio di sovrapposizione, si ha che ogni soluzione del problema è una combinazione lineare delle soluzioni appena trovate:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \cdot (A_n \cdot \cos(\sqrt{\lambda_n} \cdot t) + B_n \cdot \sin(\sqrt{\lambda_n} \cdot t)).$$

Tra tutte le soluzioni quindi quella che ha frequenza minore è:

$$u_1(x, t) = f_1(x) \cdot (A_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda_1} \cdot t) + B_1 \cdot \sin(\sqrt{\lambda_1} \cdot t)).$$

La frequenza fondamentale associata all'insieme A è perciò $\sqrt{\lambda_1}$ ed è minima quando λ_1 lo è. Chiamiamo $\lambda_1 := \lambda(A)$.

Capitolo 2

Riformulazione del problema in termini variazionali

L'obiettivo ora è quello di riformulare il problema in termini variazionali, in particolare in questo capitolo dimostriamo che $\lambda(A)$ è il minimo del seguente funzionale:

$$F : H_0^1(A) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad F(u) := \frac{\int_A |\nabla u|^2 dx}{\int_A u^2 dx}.$$

$F(u)$ si chiama quoziente di Rayleigh. Dalla disuguaglianza di Poincaré si ha che esiste $C(A, n) > 0$ tale che $F(u) \geq \frac{1}{C(A, n)^2} > 0$. Quindi il funzionale possiede un estremo inferiore, chiamiamolo m . Sorge naturale la domanda se tale estremo m è pure un minimo e se esistono funzioni u , dette ottimali, che verificano l'uguaglianza $m \cdot \int_A |\nabla u|^2 dx = \int_A u^2 dx$.

In questo capitolo, mediante il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, dimostreremo il seguente teorema:

Teorema 2.1. F ha minimo su $H_0^1(A) \setminus \{0\}$ ed esiste una funzione u per cui vale l'uguaglianza.

Osservazione: è equivalente dimostrare che esiste il minimo di:

$$\left\{ \int_A |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(A), \int_A u^2 dx = 1 \right\}.$$

Successivamente mostreremo che tale minimo è proprio $\lambda(A)$.

2.1 Metodo diretto del Calcolo delle Variazioni

Il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni si basa sulla stessa idea del Teorema di Weierstrass di usare la continuità di una funzione e la compattezza del dominio per dimostrare l'esistenza del minimo di tale funzione. Per un approfondimento si rimanda al capitolo 1 di [4].

Sia quindi X un insieme ed $F : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ una funzione e studiamo il problema di esistenza del minimo di $\{F(x) \in (-\infty, +\infty] : x \in X\}$.

L'idea è quella di cercare una topologia τ su X con le seguenti proprietà:

- $F : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ semicontinua inferiormente, cioè per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\{x \in X | F(x) > t\} \in \tau$, ovvero i sopralivelli stretti sono insiemi aperti,
- (X, τ) è compatto.

Queste due proprietà sono in competizione, perché è più probabile che (X, τ) sia compatto se ci sono pochi aperti, ma allora è più difficile che tutti i sopralivelli siano aperti. Ma se si riesce ad avere entrambe le proprietà allora possiamo concludere:

Teorema 2.2. Sia (X, τ) compatto e $F : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ semicontinua inferiormente (s.c.i.) su X rispetto a τ . Allora F assume minimo su X .

Dimostrazione. Sia $m := \inf\{F(x) \in (-\infty, +\infty] : x \in X\}$. Se F non è costantemente $+\infty$ allora $m \in [-\infty, +\infty)$.

Sia $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che $\lambda_{n+1} < \lambda_n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = m$. Definiamo $A_n := \{x \in X | F(x) > \lambda_n\}$ che sono aperti per ipotesi e banalmente $A_n \subset A_{n+1}$. Supponiamo per assurdo che m non sia minimo, allora $F(x) \neq m$ per ogni $x \in X$ e questo implica che $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Per compattezza esiste $N \in \mathbb{N}$ t.c. $X = \bigcup_{n=1}^N A_n = A_N$ e quindi $F(x) > \lambda_N > m$ per ogni $x \in X$, che è in contraddizione con la definizione di m . \square

Osservazione: Nel caso in cui (X, τ) soddisfi il primo assioma di numerabilità, ossia che il filtro degli intorni di ogni punto di X ammetta base numerabile, le seguenti affermazioni sono equivalenti (si veda la Proposizione 1.7 di [4]):

- $F : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$ è semicontinua inferiormente,
- per ogni $x \in X$ si ha $F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F(x_h)$ per ogni $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ successione convergente a x in X .

Tutti gli spazi metrici soddisfano tale assioma, ad esempio considerando come base le palle aperte di raggio $1/n$ con $n \in \mathbb{N}$. Le topologie deboli in generale non sono metrizzabili, ma se lo spazio duale è separabile allora i sottoinsiemi limitati possono essere dotati di una metrica che induce la topologia debole (vedi Teorema III.25' di [3]). In particolare i sottoinsiemi di $H_0^1(A)$ limitati sono metrizzabili in quanto spazio di Banach separabile e riflessivo (vedi Corollario III.24 di [3]). D'ora in poi, quando equivalenti, useremo il termine "semicontinuità inferiore" anche per la seconda proprietà.

2.2 Esistenza del minimo del quoziente di Rayleigh in H_0^1

Come abbiamo già visto, su $H^1(A)$ sono definite la topologia forte e la topologia debole. Inoltre, la topologia debole, che vedremo essere esattamente la topologia cercata nel metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, si descrive sequenzialmente nel seguente modo:

$f_h \rightharpoonup f$ in H^1 se $f_h \rightharpoonup f$ in $L^2(A)$ e $\nabla f_h \rightharpoonup \nabla f$ in $L^2(A)$.

Dimostriamo ora due teoremi che ci permetteranno infine di dimostrare il Teorema 2.1.

Teorema 2.3. Sia X uno spazio riflessivo e sia $A \subset X$ chiuso debolmente e limitato. Allora A è compatto debole.

Dimostrazione. Essendo A limitato allora esiste $R \in \mathbb{R}^+$ tale che $A \subset B_X(0, R)$. Per il Teorema di Kakutani, essendo X riflessivo, $B_X(0, R)$ è debolmente compatta. Perciò essendo A un chiuso debole in un compatto debole è anch'esso un compatto per la topologia debole. \square

Teorema 2.4. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato. Allora la norma è semicontinua inferiormente per la convergenza debole, ossia se $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è una successione che converge debolmente a $x \in X$, allora $\|x\| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|x_h\|$.

Dimostrazione. Sia $(X, \|\cdot\|)$ lo spazio normato e $(X', \|\cdot\|_{X'})$ il suo duale, dove $\|x'\|_{X'} = \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x', x \rangle$, con $\langle x', x \rangle$ che indica la valutazione di x' in x . Dal Teorema di Hahn-Banach (si veda Corollario I.4 di [3]) si ha $\|x\| = \sup_{\|x'\|_{X'} \leq 1} |\langle x', x \rangle|$. Sia ora $(x_h)_{h \in \mathbb{N}}$ una successione che converge debolmente a x in X , $x_h \rightharpoonup x$, ovvero per ogni $x' \in X'$ vale $\langle x', x_h \rangle \rightarrow \langle x', x \rangle$ per $h \rightarrow \infty$.

Dunque se $\|x'\|_{X'} \leq 1$ si ha $|\langle x', x \rangle| = \lim_{h \rightarrow \infty} |\langle x', x_h \rangle| = \liminf_{h \rightarrow \infty} |\langle x', x_h \rangle| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|x'\|_{X'} \|x_h\| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|x_h\|$ e quindi passando al sup otteniamo

la semicontinuità inferiore della norma per la convergenza debole:

$$\|x\| = \sup_{\|x'\|_{X'} \leq 1} |\langle x', x \rangle| \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|x_h\|.$$

□

Dimostriamo il Teorema 2.1.

Dimostrazione. Sia $m := \inf\{\int_A |\nabla u|^2 dx : u \in H_0^1(A), \int_A u^2 dx = 1\}$. Allora esiste $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ successione minimizzante, cioè $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset X := \{u \in H_0^1(A) : \int_A u^2 dx = 1\}$ tale che $m = \lim_{h \rightarrow \infty} \int_A |\nabla u_h|^2 dx$. Essendo minimizzante, $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ è limitata in $H_0^1(A)$, quindi esiste $u' \in H_0^1(A)$ tale che $\int_A |\nabla u'|^2 dx < \infty$ e $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset K := \{u \in H_0^1(A) : \int_A |\nabla u|^2 dx \leq \int_A |\nabla u'|^2 dx\}$.

Definiamo su K la topologia debole di $H^1(A)$ e mostriamo ora che è la topologia cercata nel metodo diretto del Calcolo delle Variazioni:

- Semicontinuità inferiore della norma $\|\cdot\|_{(1,0)}$.
Basta applicare il Teorema 2.4 a $(H_0^1(A), \|\cdot\|_{(1,0)})$ e si ottiene che se $u_h \rightharpoonup u$ in $H_0^1(A)$ allora $\|u\|_{(1,0)} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|u_h\|_{(1,0)}$.
- K è debolmente compatto.
 K è limitato infatti per ogni $u \in K$ vale $\|u\|_{(1,0)} = \|\nabla u\|_{L^2(A)} \leq \|\nabla u'\|_{L^2(A)} < \infty$. Quindi, per quanto visto, esiste una metrica che induce su K la topologia debole. Inoltre K è debolmente chiuso perché se $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset K$ converge debolmente ad $u \in H_0^1(A)$ allora per la semicontinuità inferiore $\|u\|_{(1,0)} \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|u_h\|_{(1,0)} \leq \|u'\|_{(1,0)}$ e quindi $u \in K$. Applicando il Teorema 2.3 si ha perciò che K è debolmente compatto.

Sono soddisfatte entrambe le ipotesi del Teorema 2.2, quindi $\|\cdot\|_{(1,0)}$ ammette minimo su K . Mostriamo ora che tale minimo sta in X , ossia che X è chiuso rispetto alla topologia debole. Essendo $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ limitata in uno spazio riflessivo (si veda il Teorema III.27 di [3]), esiste $u \in H_0^1(A)$ e una sottosuccessione $(u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tale che $u_{h_k} \rightharpoonup u$ in $H_0^1(A)$, ovvero $u_{h_k} \rightharpoonup u$ in $L^2(A)$ e $\nabla u_{h_k} \rightharpoonup \nabla u$ in $L^2(A)$. Dal Teorema 1.3 di Rellich-Kondrachov l'inclusione canonica $i : H_0^1(A) \rightarrow L^2(A)$ è compatta e quindi esiste un'ulteriore sottosuccessione $(u_j^*)_{j \in \mathbb{N}}$ tale che $u_j^* \rightarrow u$ in $L^2(A)$ fortemente. In particolare, per la continuità della norma $\|\cdot\|_{L^2(A)}$, si ha $\int_A u^2 dx = 1$, ovvero $u \in X$.

Per la semicontinuità inferiore e per definizione di estremo inferiore si ha:

$$m \leq \int_A |\nabla u|^2 dx \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_A |\nabla u_j^*|^2 dx = m.$$

Quindi valgono tutte le uguaglianze e perciò m è effettivamente un minimo ed esiste $u \in X$ funzione ottimale. □

2.3 $\lambda(A)$ è il minimo del quoziente di Rayleigh

Dimostriamo ora che il minimo del quoziente di Rayleigh è il primo autovalore di $-\Delta$. Per fare ciò, fissata $\phi \in H_0^1(A)$, si introduce la seguente funzione:

$$\Phi(\epsilon) := \frac{\int_A |\nabla(u + \epsilon\phi)|^2 dx}{\int_A |u + \epsilon\phi|^2 dx}$$

dove u è il minimo del quoziente di Rayleigh. Quindi si deve avere $\Phi'(0) = \frac{d\Phi}{d\epsilon}(0) = 0$ per ogni $\phi \in H_0^1(A)$. Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\begin{aligned} \Phi(\epsilon) &= \frac{\int_A |\nabla u|^2 + \epsilon^2 |\nabla \phi|^2 + 2\epsilon \nabla u \cdot \nabla \phi dx}{\int_A u^2 + \epsilon^2 \phi^2 + 2\epsilon u \phi dx} \\ &= \frac{\int_A |\nabla u|^2 dx + \epsilon^2 \int_A |\nabla \phi|^2 dx + 2\epsilon \int_A \nabla u \cdot \nabla \phi dx}{\int_A u^2 dx + \epsilon^2 \int_A \phi^2 dx + 2\epsilon \int_A u \phi dx}. \end{aligned}$$

Derivando rispetto la ϵ abbiamo:

$$\begin{aligned} \Phi'(\epsilon) &= \frac{(2\epsilon \int_A |\nabla \phi|^2 dx + 2 \int_A \nabla u \cdot \nabla \phi dx) (\int_A u^2 dx + \epsilon^2 \int_A \phi^2 dx + 2\epsilon \int_A u \phi dx)}{(\int_A u^2 dx + \epsilon^2 \int_A \phi^2 dx + 2\epsilon \int_A u \phi dx)^2} \\ &\quad - \frac{(\int_A |\nabla u|^2 dx + \epsilon^2 \int_A |\nabla \phi|^2 dx + 2\epsilon \int_A \nabla u \cdot \nabla \phi dx) (2\epsilon \int_A \phi^2 dx + 2 \int_A u \phi dx)}{(\int_A u^2 dx + \epsilon^2 \int_A \phi^2 dx + 2\epsilon \int_A u \phi dx)^2} \\ \Rightarrow \Phi'(0) &= 2 \frac{\int_A \nabla u \cdot \nabla \phi dx \cdot \int_A u^2 dx - \int_A |\nabla u|^2 dx \cdot \int_A u \phi dx}{(\int_A u^2 dx)^2}. \end{aligned}$$

Quindi si ha $\Phi'(0) = 0$ per ogni $\phi \in H_0^1(A)$ se e solo se vale

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla \phi dx = \frac{\int_A |\nabla u|^2 dx}{\int_A u^2 dx} \int_A u \phi dx = m \int_A u \phi dx \quad \forall \phi \in H_0^1(A),$$

ovvero u è un autovettore relativo a m , il minimo del quoziente di Rayleigh, per l'operatore $-\Delta$. Rimane da provare che è il più piccolo autovalore. Sia $\lambda > 0$ un autovalore per $-\Delta$ e sia $w \in H_0^1(A)$ con $\|w\|_2 = 1$ l'autovettore relativo a λ . Per definizione di m e di autovalore, si ha che:

$$m \leq \int_A |\nabla w|^2 dx = \lambda \int_A w^2 dx = \lambda.$$

Quindi m è il più piccolo autovalore di $-\Delta$:

$$\lambda(A) = m = \min \left\{ \frac{\int_A |\nabla u|^2 dx}{\int_A u^2 dx} : u \in H_0^1(A) \setminus \{0\} \right\}.$$

Capitolo 3

Risoluzione del problema

Per concludere ci manca solo da dimostrare la disuguaglianza di Faber-Krahn che ci permette di affermare che $\lambda(A)$ è minimo se A è una palla. Per fare ciò introdurremo la nozione di simmetrizzazione di Schwarz di una funzione. Simmetrizzare significa sostituire un oggetto con uno che mantiene alcune proprietà ma ne acquisisce altre di simmetria. La simmetrizzazione di Schwarz si basa su alcune idee di teoria geometrica della misura, la formula di coarea e la disuguaglianza isoperimetrica, che richiamiamo nella prossima sezione.

3.1 Richiami della teoria geometrica della misura

Tutti i seguenti richiami si possono trovare in [5] e in [6].

Teorema 3.1 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski). Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ due insiemi non vuoti, allora

$$\mathcal{L}^n(A + B)^{1/n} \geq \mathcal{L}^n(A)^{1/n} + \mathcal{L}^n(B)^{1/n},$$

dove $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$.

Per la dimostrazione si veda il Teorema 3.2.41 di [6].

Definizione 3.1 (Misura di Hausdorff). 1. Siano $A \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < \infty$, $0 < \delta \leq \infty$. Definiamo

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s) \left(\frac{\text{diam} C_j}{2} \right)^s : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j, \text{diam} C_j \leq \delta \right\},$$

dove $\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(\frac{s}{2}+1)}$, con $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ la funzione Gamma usuale.

2. Siano A e s come sopra, allora definiamo:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} H_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} H_\delta^s(A).$$

Chiamiamo \mathcal{H}^s la misura di Hausdorff s -dimensionale su \mathbb{R}^n .

Osservazione: \mathcal{H}^s è una misura di Borel regolare e si può dimostrare che $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ su \mathbb{R}^n .

Teorema 3.2 (di Rademacher). Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una funzione localmente lipschitziana, con $n, m \in \mathbb{N}$. Allora f è differenziabile \mathcal{L}^n -quasi ovunque.

Per la dimostrazione si veda il Teorema 2 in §3.1.2 di [5].

Teorema 3.3 (Formula di coarea). Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora per ogni $g : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ \mathcal{L}^1 -misurabile si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) |\nabla f| dx = \int_0^\infty \left(\int_{f^{-1}(\{t\})} g d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt.$$

$|\nabla f| dx$ si chiama termine di coarea.

Osservazione: La formula di coarea è una sorta di generalizzazione curvilinea del Teorema di Fubini.

Per la dimostrazione si veda il Teorema 2 in §3.4.3 di [5]. Nella formula si è sfruttato che $Jf = |\nabla f|$.

Definizione 3.2 (Perimetro). Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ un insieme \mathcal{L}^n -misurabile. Definiamo allora per ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^n$:

$$P(E, A) = \sup \left\{ \int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx : \varphi \in C_c^1(A, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

Il perimetro di E è allora $P(E) = P(E, \mathbb{R}^n)$.

Osservazione: Si può dimostrare che qualora ∂E sia di classe C^1 allora $P(E)$ coincide con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$ (si veda l'esempio 2 in §5.1 di [5]).

Teorema 3.4 (Disuguaglianza isoperimetrica quantitativa). Sia $n \geq 2$. Fissato $r > 0$, definiamo $\mathcal{B} := \{B \subset \mathbb{R}^n : B \text{ palla di raggio } r\}$ e poniamo $w_n := \mathcal{L}^n(B)$ con $B \in \mathcal{B}$. Sia $E \subset \mathbb{R}^n$ \mathcal{L}^n -misurabile con $\mathcal{L}^n(E) = w_n$. Definiamo $\operatorname{dist}(E, \mathcal{B}) = \inf_{B \in \mathcal{B}} \operatorname{dist}(E, B) = \inf_{B \in \mathcal{B}} \mathcal{L}^n(E \Delta B)$. Allora esiste $a_n > 0$ tale che per ogni $B \in \mathcal{B}$:

$$P(E) - P(B) \geq a_n \operatorname{dist}(E, \mathcal{B})^2.$$

Per la dimostrazione si veda [7].

Osservazione: Quindi $P(E) \geq P(B)$ per ogni E misurabile avente stessa misura di B e vale l'uguaglianza se e solo se $\text{dist}(E, \mathcal{B}) = 0$, cioè se e solo se E è una palla di uguale misura di B . Ciò significa che tra tutti gli insiemi di stessa misura quelli di perimetro minimo sono tutte e sole le palle. In particolare se $E \subset \mathbb{R}^n$ è un insieme \mathcal{L}^n -misurabile la cui frontiera ∂E è di classe C^1 , allora se B è una palla tale che $\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(B)$ vale la seguente disuguaglianza:

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial B) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial E).$$

Teorema 3.5 (di Sard). Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione $C^\infty(A, \mathbb{R})$. Allora l'insieme dei valori critici ha \mathcal{L}^1 -misura nulla, dove $c \in \mathbb{R}$ è valore critico se esiste $x \in A$ tale che $c = f(x)$ e il gradiente di f calcolato in x è nullo.

Per la dimostrazione si veda [8].

Osservazione: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f \in C^\infty(A, \mathbb{R})$, allora per i teoremi di Sard e di Dini l'equazione $f(x) = t$ definisce una sottovarietà regolare per quasi ogni t . Quindi $\partial\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = t\}$ ed è di classe C^1 .

3.2 Simmetrizzazione di Schwarz

Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ funzione \mathcal{L}^n -misurabile con la seguente proprietà di riarrangiabilità:

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) < \infty \quad \text{per ogni } t > 0.$$

Chiamiamo i sopralivelli stretti di f con $A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$.

L'obiettivo è quello di trovare un'altra funzione f^* che abbia le seguenti proprietà:

1. f^* sia a simmetria radiale, ossia esista $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ tale che $f^*(x) = \varphi(|x|)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$,
2. $\int_{\mathbb{R}^n} (f^*)^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx$,
3. $\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx$.

A questo scopo diamo le seguenti definizioni:

Definizione 3.3. Dato $A \subset \mathbb{R}^n$ un insieme misurabile con $\mathcal{L}^n(A) < \infty$, sia $A^* := B_{\mathbb{R}^n}(0, R)$ dove R è scelto in modo che $\mathcal{L}^n(A^*) = \mathcal{L}^n(A)$.

Osservazione: Esiste un unico R che soddisfa tale proprietà in quanto la funzione $R \rightarrow \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, R))$ è strettamente crescente.

Notiamo inoltre che possiamo riscrivere $f(x)$ in questo modo:

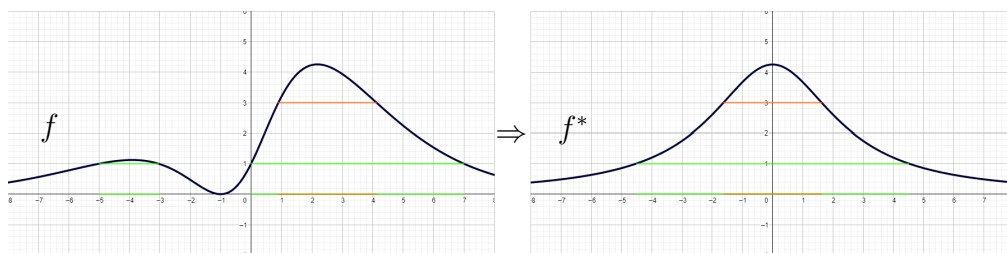
$$f(x) = \int_0^{f(x)} 1 dt = \int_0^\infty \chi_{(0, f(x))}(t) dt = \int_0^\infty \chi_{A_t}(x) dt.$$

Infatti $\chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}}(x) = 1 \Leftrightarrow \chi_{(0, f(x))}(t) = 1$ e A_t ha misura finita per ipotesi.

Diamo quindi ora la definizione di simmetrizzata di f :

Definizione 3.4. Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ funzione \mathcal{L}^n -misurabile riarrangiabile, ovvero con la proprietà di riarrangiabilità, la sua simmetrizzata è così definita:

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi_{A_t^*}(x) dt.$$



Proprietà elementari di f^* :

- $A_t^* = \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\}$,
- f^* è \mathcal{L}^n -misurabile, in quanto i sopralivelli sono insiemi aperti,
- f^* soddisfa la prima proprietà richiesta, infatti i sopralivelli sono palle. Inoltre si ha anche che φ è non crescente.

Teorema 3.6. Data $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ funzione \mathcal{L}^n -misurabile riarrangiabile, allora vale la seconda proprietà, ovvero $\int_{\mathbb{R}^n} |f^*|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 dx$.

Dimostrazione. Utilizzando Fubini-Tonelli si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{f^2} 1 dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \chi_{(0, f(x)^2)} dt \right) dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)^2 > t\}} 1 dx \right) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t^{1/2}\}} 1 dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t^{1/2}\}} 1 dx \right) dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x)^2 > t\}} 1 dx \right) dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^\infty \chi_{(0, f^*(x)^2)} dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{(f^*)^2} 1 dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (f^*)^2 dx.
\end{aligned}$$

□

Studiamo ora la terza proprietà. Per fare ciò enunciamo il seguente teorema:

Teorema 3.7. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ funzione \mathcal{L}^n -misurabile riarrangiabile. Allora se $f \in \text{Lip}(\mathbb{R}^n)$ allora anche $f^* \in \text{Lip}(\mathbb{R}^n)$ e vale $\text{Lip}(f^*) \leq \text{Lip}(f)$.

Dimostrazione. Per ipotesi esiste $L \geq 0$ tale che $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$. Fissiamo $x, y \in \mathbb{R}^n$ e definiamo $t_1 := f^*(x)$, $t_2 := f^*(y)$. Se $t_1 = t_2$ abbiamo concluso, se invece sono diversi possiamo assumere $t_1 > t_2$. Sia allora $\epsilon > 0$ tale che $2\epsilon < t_1 - t_2$. Abbiamo quindi che:

$$x \in \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t_1 - \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t_1 - \epsilon\}^* := B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1),$$

$$y \notin \{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t_2 + \epsilon\} = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t_2 + \epsilon\}^* := B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2),$$

per opportuni $r_2 \geq r_1 \geq 0$. Da ciò si deduce che $|x - y| \geq r_2 - r_1$.

Definiamo $E_1 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t_1 - \epsilon\}$, $E_2 := \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t_2 + \epsilon\}$. Quindi $\mathcal{L}^n(E_1) = \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1))$, $\mathcal{L}^n(E_2) = \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2))$ e siccome $2\epsilon < t_1 - t_2$ si ha che $E_1 \subset E_2$.

Consideriamo ora $r = \text{dist}(E_1, \partial E_2) = \inf\{|x' - y'| : x' \in E_1, y' \in \partial E_2\}$.

Osserviamo che $E_1 + rB_{\mathbb{R}^n}(0, 1) \subset E_2$, e quindi otteniamo:

$$\begin{aligned}
r_2^n \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, 1)) &= \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, r_2)) \geq \mathcal{L}^n(E_1 + rB_{\mathbb{R}^n}(0, 1)) \\
&\geq (\mathcal{L}^n(E_1)^{1/n} + \mathcal{L}^n(rB_{\mathbb{R}^n}(0, 1))^{1/n})^n \\
&= (\mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, r_1))^{1/n} + \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, r))^{1/n})^n \\
&= \mathcal{L}^n(B_{\mathbb{R}^n}(0, 1))(r_1 + r)^n.
\end{aligned}$$

Nella seconda disuguaglianza si è usato il Teorema 3.1. Si conclude quindi che $r_2 \geq r_1 + r$, ovvero $r \leq r_2 - r_1 \leq |x - y|$. Prendiamo ora $x' \in E_1$ e $y' \in \partial E_2$

tali che $|x' - y'| \leq r + \epsilon$. In particolare si ha $f(x') > t_1 - \epsilon$ e $f(y') \leq t_2 + \epsilon$. Quindi:

$$\begin{aligned} |f^*(x) - f^*(y)| &= |t_1 - t_2| = t_1 - t_2 < f(x') + \epsilon - f(y') + \epsilon \\ &\leq L|x' - y'| + 2\epsilon \leq L(r + \epsilon) + 2\epsilon \leq L(|x - y| + \epsilon) + 2\epsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si conclude che $|f^*(x) - f^*(y)| \leq L|x - y|$. \square

Teorema 3.8 (Disuguaglianza di Pólya-Szegö). Sia $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$ riarrangiabile. Allora $f^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e vale la terza proprietà:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre $f \geq 0$, altrimenti la si può sostituire con $|f|$. Dimostriamo intanto la tesi per il caso in cui $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e poi estenderemo per densità a tutto $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Supponiamo perciò $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. f è quindi lipschitziana e, per il Teorema 3.7, lo è pure f^* . Inoltre per il Teorema 3.2 di Rademacher le funzioni lipschitziane sono differenziabili quasi ovunque, quindi ∇f e ∇f^* sono definiti quasi ovunque. In aggiunta, essendo f in $H^1(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi, il suo gradiente è in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e quindi tutti gli integrali che scriveremo sono ben definiti.

Ora utilizzando la formula di coarea (Teorema 3.3), con $|\nabla f|dx$ termine di coarea, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f| |\nabla f| dx = \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f(x)=t\}} |\nabla f| d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt.$$

Analogamente si trova:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^2 dx = \int_0^\infty \left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x)=t\}} |\nabla f^*| d\mathcal{H}^{n-1} \right) dt.$$

Ora sappiamo che $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) = \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\})$ per ogni $t > 0$. Calcoliamo $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\})$ utilizzando sempre la formula di coarea con $|\nabla f|dx$ termine di coarea:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\{f > t\}) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>t\}}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>t\}}(x) \frac{1}{|\nabla f|} |\nabla f| dx \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \chi_{\{f>t\}}(x) \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds \\ &= \int_t^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \chi_{\{f>t\}}(x) \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds \end{aligned}$$

$$= \int_t^\infty \left(\int_{\{f=s\}} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds.$$

Nella quarta uguaglianza si è usato il fatto che se $s < t$ l'insieme $\{f = s\} \cap \{f > t\}$ ha misura nulla e nella quinta che se $s > t$ allora su $\{f = s\}$ vale $\chi_{\{f > t\}}(x) = 1$. Analogamente si trova:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\{f^* > t\}) &= \int_t^\infty \left(\int_{\{f^*=s\}} \frac{1}{|\nabla f^*|} d\mathcal{H}^{n-1} \right) ds \\ &= \int_t^\infty \frac{1}{|\nabla f^*|} \mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = s\}) ds. \end{aligned}$$

Nell'ultima uguaglianza si è sfruttato il fatto che f^* è radiale, ossia $|\nabla f^*|$ è costante sulla palla $\{f^* = s\}$.

Applichiamo ora il Teorema di Lebesgue, affermando che ogni funzione monotona è derivabile quasi ovunque, alla funzione $t \rightarrow \mathcal{L}^n(\{f > t\})$. Ciò permette di derivare $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) = \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\})$ e ottenere l'uguaglianza $\frac{d}{dt} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\})$ per quasi ogni $t > 0$. Utilizzando ora il Teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) &= - \int_{\{f=t\}} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1}, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f^*(x) > t\}) &= - \frac{1}{|\nabla f^*|} \mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = t\}). \end{aligned}$$

Otteniamo quindi la seguente uguaglianza per quasi ogni $t > 0$:

$$\int_{\{f=t\}} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} = \frac{1}{|\nabla f^*|} \mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = t\}).$$

Ora però, usando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) &= \int_{\{f=t\}} \frac{1}{|\nabla f|^{1/2}} |\nabla f|^{1/2} d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \left(\int_{\{f=t\}} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/2} \left(\int_{\{f=t\}} |\nabla f| d\mathcal{H}^{n-1} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Abbiamo così:

$$\int_{\{f=t\}} |\nabla f| d\mathcal{H}^{n-1} \geq \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})^2}{\int_{\{f=t\}} \frac{1}{|\nabla f|} d\mathcal{H}^{n-1}} = \frac{\mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})^2 |\nabla f^*|}{\mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = t\})}$$

$$\geq |\nabla f^*| \mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = t\}) = \int_{\{f^*=t\}} |\nabla f^*| d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Nella seconda disuguaglianza si è usata la disuguaglianza isoperimetrica (Teorema 3.4) che, siccome $\mathcal{L}^n(\{f > t\}) = \mathcal{L}^n(\{f^* > t\})$, ci permette di concludere $\mathcal{H}^{n-1}(\{f^* = t\}) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{f^* > t\}) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{f > t\}) = \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\})$. Infatti, essendo f^* radiale, $\{f^* = t\}$ è una palla, ed è quindi inoltre di classe C^1 . Nell'ultima uguaglianza si è usato il fatto che $|\nabla f^*|$ è costante su $\{f^* = t\}$.

Infine, integrando su $(0, \infty)$ l'ultima disuguaglianza e per quanto visto all'inizio della dimostrazione si trova la tesi:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx.$$

Dimostriamolo ora per una f in $H^1(\mathbb{R}^n)$. Essendo $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ denso in $H^1(\mathbb{R}^n)$, esiste una successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $f_k \rightarrow f$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$, ovvero $f_k \rightarrow f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\nabla f_k \rightarrow \nabla f$ in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Per il Teorema 3.6 e per quanto visto nel caso precedente vale:

$$\|f_k^*\|_{1,2} = \|f_k^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f_k^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f_k\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f_k\|_{1,2}.$$

La successione $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è convergente in $H^1(\mathbb{R}^n)$ e perciò è limitata. Quindi, per la disuguaglianza precedente, è limitata pure la successione $(f_k^*)_{k \in \mathbb{N}}$. Essendo $H^1(\mathbb{R}^n)$ riflessivo, esiste una sottosuccessione $(f_{k_j}^*)_{j \in \mathbb{N}}$ e una $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tali che $f_{k_j}^* \rightharpoonup v$ in $H^1(\mathbb{R}^n)$ (si veda il Teorema III.27 di [3]). Ora però si ha $v = f^*$ (per questo fatto si veda la dimostrazione del lemma 2.4 di [9]), e quindi si è dimostrato che $f^* \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre, per la continuità e la semicontinuità inferiore rispetto alla convergenza debole della norma $\|\cdot\|_{1,2}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \|f^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \|f^*\|_{1,2} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_{k_j}^*\|_{1,2} \\ &\leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \|f_{k_j}\|_{1,2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Ora, essendo $\|f^*\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, si ottiene quanto voluto, concludendo così la dimostrazione:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 dx.$$

□

3.3 Disuguaglianza di Faber-Krahn

Abbiamo ora tutti gli strumenti necessari per dimostrare il seguente teorema e concludere la tesi.

Teorema 3.9 (Disuguaglianza di Faber-Krahn). Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e sia B una palla in \mathbb{R}^2 tale che $\mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}^2(B)$. Allora vale la seguente disuguaglianza:

$$\lambda(B) \leq \lambda(A).$$

Dimostrazione. Sia $A^* = B_{\mathbb{R}^2}(0, r)$ tale che $\mathcal{L}^2(A) = \mathcal{L}^2(A^*)$. Dal Teorema 2.1, esiste $f \in H_0^1(A)$ che minimizza il quoziente di Rayleigh, ossia:

$$\lambda(A) = \frac{\int_A |\nabla f|^2 dx}{\int_A f^2 dx}.$$

Possiamo supporre $f \geq 0$ in A . Estendiamo f a tutto \mathbb{R}^2 ponendo $f = 0$ su $\mathbb{R}^2 \setminus A$. Quindi $f \in H^1(\mathbb{R}^2)$ ed è banalmente riarrangiabile. Sia $f^* \in H^1(\mathbb{R}^2)$ la simmetrizzata di f , allora f^* è a simmetria radiale e $f^*(x) \neq 0$ se e solo se $x \in A^*$, e perciò banalmente $f \in H^1(A^*)$. Inoltre f^* è nulla su ∂A^* e quindi $f^* \in H_0^1(A^*)$. Allora per i Teoremi 3.6 e 3.8 abbiamo che:

$$\begin{aligned} \int_{A^*} (f^*)^2 dx &= \int_A f^2 dx, \\ \int_{A^*} |\nabla f^*|^2 dx &\leq \int_A |\nabla f|^2 dx. \end{aligned}$$

Quindi, essendo $\lambda(A^*)$ il minimo del quoziente di Rayleigh relativo ad A^* , si conclude quanto volevamo:

$$\lambda(B) = \lambda(A^*) \leq \frac{\int_{A^*} |\nabla f^*|^2 dx}{\int_{A^*} (f^*)^2 dx} \leq \frac{\int_A |\nabla f|^2 dx}{\int_A f^2 dx} = \lambda(A).$$

□

Osservazione: In particolare, applicando la radice quadrata ad ambo i membri della disuguaglianza appena dimostrata, si ottiene che la frequenza fondamentale associata alla palla B è minore o uguale di quella associata all'insieme A , dimostrando così quanto voluto.

Bibliografia

- [1] Sandro Salsa. *Equazioni a derivate parziali: Metodi, modelli e applicazioni*, volume 98. Springer, 2016.
- [2] Robert A. Adams and John JF Fournier. *Sobolev Spaces*. Elsevier, 2003.
- [3] Haim Brezis. *Analisi funzionale: teoria e applicazioni*, volume 9. Liguori Editore Srl, 1986.
- [4] Gianni Dal Maso. *An Introduction to Γ -Convergence*, volume 8. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] Lawrence C. Evans and Ronald F. Garzepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Routledge, 2018.
- [6] Herbert Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, 2014.
- [7] Nicola Fusco, Francesco Maggi, and Aldo Pratelli. The sharp quantitative isoperimetric inequality. *Annals of mathematics*, pages 941–980, 2008.
- [8] Arthur Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48(12):883–890, 1942.
- [9] William P. Ziemer and John E. Brothers. Minimal rearrangements of sobolev functions. *J. Reine. Angew. Math.*, pages 153–179, 1988.
- [10] Roberto Monti. Introduzione al Calcolo delle Variazioni. *Manuscripta*, 2017.
- [11] Fabio Pizzichillo. Teorema spettrale per operatori compatti e applicazione alle equazioni alle derivate parziali. *Thesis. Università degli studi di Bari*, 2012.
- [12] Marco Bramanti. Simmetrizzazione di Schwarz di funzioni e applicazioni a problemi variazionali ed equazioni a derivate parziali. *Preprint*, 2004.