Università degli studi di Padova

dipartimento di matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Dimensione dell'insieme singolare di una misura n-uniforme

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureando:
Giacomo Vecchiato
Matricola:
1147110

20 Luglio 2018

Anno Accademico 2017-2018

Indice

1 Preliminari **5**
- 1.1 Notazioni . . . 5
- 1.2 Nozioni base di teoria della misura . . . 6
  - 1.2.1 Regolarizzazioni . . . 8
- 1.3 Misura di Hausdorff . . . 8
- 1.4 Misure di Radon . . . 10
  - 1.4.1 Convergenza debole di misure di Radon . . . 10
  - 1.4.2 Metrizzabilità di $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ . . . 13
  - 1.4.3 Differenziazione di misure di Radon . . . 16
- 1.5 Sottovarietà di $\mathbb{R}^d$ . . . 17
  - 1.5.1 Formule di Area e Coarea . . . 18
  - 1.5.2 Densità di una sottovarietà . . . 18

2 Misure n-uniformi **21**
- 2.1 Misure tangenti . . . 21
  - 2.1.1 Proprietà di $T_{x,r}[\mu]$ . . . 23
- 2.2 Misure uniformi . . . 24
  - 2.2.1 Un funzionale per $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ . . . 25
  - 2.2.2 Regolarità del supporto di misure uniformi . . . 25
- 2.3 Rapporto tra misure uniformi e di Hausdorff . . . 27
  - 2.3.1 Sottovarietà e punti piatti . . . 28
- 2.4 Componente sferica . . . 30
- 2.5 Misure coniche 3-uniformi . . . 33

3 Teorema di Nimer **37**
  - 3.0.1 Notazioni . . . 37
- 3.1 Risultati preliminari . . . 38
- 3.2 Dimostrazione del teorema di Nimer . . . 45
  - 3.2.1 Base induttiva della dimostrazione di Nimer . . . 46
  - 3.2.2 Passaggio al tangente di μ . . . 46
  - 3.2.3 Scomposizione di Σ . . . 48
  - 3.2.4 Passo induttivo della dimostrazione di Nimer . . . 49

4 Esempi **51**
4.1 Guscio sferico in $\mathbb{R}^3$ . . . 51
4.2 Cono di Kowalski-Preiss . . . 52
4.3 Classificazioni note . . . 56

Introduzione

In questa tesi studiamo l'insieme singolare delle misure n-uniformi in $\mathbb{R}^d$. Una misura μ è detta n-uniforme se ha la seguente forma:

$$\mu(B(x,r)) = cr^n$$

per una qualche costante $c > 0$ e per ogni x nel supporto di μ. Comprendere la struttura delle misure uniformi è diventata una questione importante fin da quando furono introdotte da Preiss [4] nello studio della rettificabilità delle misure di Radon in $\mathbb{R}^d$. Appaiono infatti come misure tangenti (degli "ingrandimenti") alle misure ϕ che hanno positivo e finito il limite

$$\lim_{r\to 0} \frac{\phi(B(x,r))}{\omega_n r^n}$$

per ϕ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$. L'indice n di una misura n-uniforme non può variare liberamente in $\mathbb{R}$. Marstrand [13] infatti prova che:

Teorema 0.1. *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$; allora n è un intero non negativo minore o uguale a d.*

Questo risultato si estende alle misure con densità finita (si veda la Definizione 1.3). Per $n = 1, 2$ Preiss in [4] fornisce una classificazione delle misure uniformi. In questi casi μ è n-uniforme se è la misura di Hausdorff ristretta ad una linea o ad un piano; in generale le misure di Hausdorff ristrette ad un n-piano sono misure n-uniformi dette piatte. Tuttavia, grazie al lavoro di Kowalski e Preiss [11] e all'articolo di Nimer [12] abbiamo altri esempi. Di grande rilievo è il cono di Kowalski-Preiss: la misura di Hausdorff ristretta al cono in $\mathbb{R}^4$

$$\Gamma = \{x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\},$$

è una misura 3-uniforme. Kirchheim e Preiss in [14], Teorema 1.4, dimostrano che il supporto di una misura n-uniforme è l'insieme degli zeri di una funzione analitica. Ciò implica che è unione al più numerabile di sottovarietà analitiche e che l'insieme singolare ha dimensione al più $n - 1$. In questo lavoro studiamo il risultato ottenuto da Nimer in [1], in cui si migliora in modo ottimale il limite sulla dimensione dell'insieme singolare, abbassandolo a $n - 3$.

Teorema 0.2. *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ e $3 \leq n \leq d$. Allora Σ è la seguente unione disgiunta:*

$$\Sigma = \mathcal{R}_\mu \cup \mathcal{S}_\mu,$$

con $\mathcal{R}_\mu$ sottovarietà di classe C^1 e dimensione n in $\mathbb{R}^d$, e $\mathcal{S}_\mu$ insieme chiuso dei punti singolari per cui vale

$$\dim(\mathcal{S}_\mu) \leq n - 3.$$

Dal momento che Γ ha un solo punto singolare, l'origine, il cono di Kowalski Preiss rappresenta in $\mathbb{R}^4$ il caso peggiore per l'insieme singolare di una misura 3-uniforme. Questo risultato è la linea guida di queste pagine, che sono strutturate come segue.

Il primo capitolo è di preliminari, trattiamo alcune proprietà delle misure di Radon, di Hausdorff e delle sottovarietà. In questo modo procediamo gradualmente verso dei concetti profondi di teoria della misura partendo da nozioni elementari.

Il secondo capitolo introduce le misure uniformi e quelle tangenti, riportandone alcune proprietà importanti. In particolare presentiamo il funzionale introdotto da Preiss [4] che calcola quanto una misura n-uniforme è vicina ad essere una misura piatta. Ci prepariamo inoltre alla dimostrazione del Teorema 0.2 studiando la componente sferica delle misure uniformi. Concludiamo il capitolo provando che l'insieme singolare delle misure coniche 3-uniformi è dato unicamente dall'origine.

Il terzo capitolo è finalizzato alla dimostrazione del Teorema 0.2, che avviene per induzione sull'indice $n \in \mathbb{N}$ della misura uniforme.

L'ultima parte della tesi è un capitolo di esempi, in cui studiamo nel dettaglio il cono di Kowalski-Preiss e riportiamo i risultati ottenuti da Nimer in [12].

Ciò che ci ha spinti a svolgere questi studi è la mancanza di una classificazione generale per le misure n-uniformi, in contrasto con la semplicità della loro definizione. Qui non risolviamo il problema, ma presentiamo una panoramica generale di questo settore della teoria geometrica della misura, presentandone i contenuti in modo chiaro e fornendo le fonti necessarie per ampliarne la conoscenza.

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo vogliamo richiamare alcune nozioni di teoria della misura ed introdurne altre di più specifiche per le misure uniformi. Incominciamo con una prima sezione di notazioni, a cui segue una parte di definizioni e teoremi in particolare riguardo le misure di Hausdorff e di Radon. Infatti, come vedremo in seguito, esse hanno un ruolo centrale nello sviluppo degli argomenti trattati in questa tesi. Si conclude infine con una sezione dedicata alle sottovarietà di $\mathbb{R}^d$; vogliamo infatti studiare la regolarità dei supporti delle misure ed il concetto di sottovarietà è alla base. Abbiamo principalmente seguito il lavoro di Nimer [1] per la selezione degli argomenti ed il libro di Mattila [2] come fonte per gli enunciati e le dimostrazioni.

1.1 Notazioni

Con $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ indichiamo rispettivamente gli usuali insiemi dei numeri reali e dei numeri naturali. Dati $x \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$, con $B(x,r)$ indichiamo la palla aperta centrata in x e di raggio r, $B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^d : |y - x| < r\}$. La scrittura $|\cdot|$ denota l'usuale norma Euclidea in $\mathbb{R}^d$, mentre $\langle \cdot, \cdot \rangle$ l'usuale prodotto scalare.

Data una funzione $f : A \to \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^d$ aperto, con $df(x)$ s'intende il suo differenziale calcolato in un punto $x \in A$; data una base per $\mathbb{R}^d$ e una per $\mathbb{R}^m$, con $\mathrm{Jac}(f(x))$ indichiamo la matrice del differenziale di f calcolata in x.

Dati $A, B \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$ e $r > 0$ usiamo:

1. $\mathcal{P}(A) = \{C : C \subset A\}$, l'insieme delle parti di A;

2. $|A|$ per indicare le cardinalità di A;

3. ∂A per indicare la frontiera di A;

4. $rA + x = \{xa + r : a \in A\}$;

5. $\mathrm{diam}(A) = \sup\{|y - z| : y, z \in A\}$, il diametro di un insieme;

6. $\text{dist}(x, A) = \inf\{|x - y| \,:\, y \in A\}$, la distanza di un punto da un insieme;
7. $\text{dist}(A, B) = \inf\{|y - z| \,:\, y \in A,\, z \in B\}$ la distanza tra due insiemi;
8. $D[A, B] = \sup\{\text{dist}(y, B) \,:\, y \in A\} + \sup\{\text{dist}(y, A) \,:\, y \in B\}$ la distanza di Hausdorff tra due insiemi.

Il simbolo $\subset$ indica l'inclusione insiemistica non necessariamente stretta.

Dato $A \subset \mathbb{R}^d$, la funzione χ_A è la funzione caratteristica di A, ossia:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Con ω_s si indica la seguente costante:

$$\omega_s = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{s}{2} + 1)}\,.$$

Nel caso in cui $s \in \mathbb{N}$, ω_s è pari al volume della palla unitaria $B(0, 1)$ in $\mathbb{R}^s$.

Sia $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi; con la scrittura $r_k \downarrow 0$ intendiamo che la successione è decrescente e tende a 0. Con $o(\epsilon)$ denotiamo l'o piccolo, cioè una qualsiasi funzione a valori ϵ reali tale che $\lim_{\epsilon\to 0} \frac{o(\epsilon)}{\epsilon} = 0$.

Con $G(n, d)$ indichiamo l'insieme di tutti gli n-piani (vettoriali) in $\mathbb{R}^d$.

1.2 Nozioni base di teoria della misura

In questa sezione richiamiamo alcuni concetti basilari di teoria della misura, a partire proprio dalla definizione di misura stessa, su $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$ generico, con l'usuale topologia indotta dalla norma Euclidea. Presentiamo anche la definizione di densità di una misura.

Definizione 1.1 (Misura). *Una funzione d'insiemi $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0, \infty]$ è detta misura se:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$*;*
2. $\mu(A) \leq \mu(B)$ *per* $A \subset B \subset \mathbb{R}^d$
3. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *per* $A_1, A_2, ... \subset \mathbb{R}^d$.

Si definisce il supporto di μ come l'insieme:

$$\text{supp}(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^d : \mu(B(x, r)) > 0 \text{ per ogni } r > 0\}$$

Il supporto di una misura è un insieme chiuso e ne studieremo più approfonditamente le proprietà ne prossimi capitoli quando tratteremo delle misure uniformi.

Definizione 1.2 (Insieme misurabile)**.** *Sia μ una misura in $\mathbb{R}^d$. Un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ è detto μ-misurabile se per ogni $B \subset \mathbb{R}^d$ vale:*

$$\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash A).$$

Siano μ misura in $\mathbb{R}^d$ ed $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ una funzione, ricordiamo che f è detta μ-misurabile se $f^{-1}(A)$ è un insieme μ-misurabile per ogni $A \subset \mathbb{R}^m$ aperto. Richiamiamo anche la definizione di σ-algebra. Un insieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ è detto σ-algebra se:

1. $\emptyset, \mathbb{R}^d \in \mathcal{A}$;
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathbb{R}^d \backslash A \in \mathcal{A}$;
3. $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Teorema 1.1. *Sia μ una misura in $\mathbb{R}^d$. L'insieme di tutti gli insiemi μ-misurabili è una σ-algebra.*

La dimostrazione di questo teorema la si può trovare nel libro di Federer [3].

La più piccola σ-algebra contenente tutti gli aperti di $\mathbb{R}^d$ è detta σ-algebra dei boreliani. Una misura in $\mathbb{R}^d$ è detta boreliana o di Borel se i boreliani sono μ-misurabili; una funzione $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ è detta boreliana o di Borel se $f^{-1}(A)$ è un boreliano per ogni $A \subset \mathbb{R}^m$ aperto.

Dati una misura μ in $\mathbb{R}^d$ ed un insieme $A \in \mathbb{R}^d$, definiamo la misura

$$\mu \llcorner A$$

tramite la formula

$$\mu \llcorner A(B) = \mu(A \cap B).$$

Il supporto di $\mu \llcorner A$ è $\mathrm{supp}(\mu) \cap A$ e ogni insieme μ-misurabile è anche $(\mu \llcorner A)$-misurabile. Questa misura, che rappresenta la restrizione di μ all'insieme A, la troveremo al termine del prossimo capitolo, in cui vedremo che le misure n-uniformi sono una restrizione delle misure di Hausdorff n-dimensionali. Per questa ragione le misure di Haudorff sono l'argomento della prossima sezione.

Siano μ e ν due misure su $\mathbb{R}^d$. Dato $A \subset \mathbb{R}^d$, ricordiamo che μ è assolutamente continua rispetto a μ se

$$\nu(A) = 0 \Rightarrow \mu(A) = 0$$

e scriveremo $\mu \ll \nu$.

Definiamo ora la densità per le misure. Partendo da essa, si può definire una densità per insiemi; in questo lavoro la densità viene utilizzata solamente nella dimostrazione del Teorema 2.6 riguardante il legame tra le misura di Hausdorff e le misure uniformi, ma in realtà ha un rapporto profondo con la regolarità dei supporti delle misure. Si veda ad esempio il lavoro di Preiss [4].

Definizione 1.3 (Densità)**.** *Siano μ una misura in $\mathbb{R}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$. Si definiscono la densità superiore $\theta^{*,s}(\mu, x)$ e la densità inferiore $\theta^s_*(\mu, x)$ come:*

$$\theta^{*,s}(\mu, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_s r^s};$$
$$\theta^s_*(\mu, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\omega_s r^s}.$$

Se i limiti superiore ed inferiore coincidono, tale valore si chiama densità e la si indica con $\theta^s(\mu, x)$.

1.2.1 Regolarizzazioni

La funzione $\chi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\chi(x) = \begin{cases} c_o \exp(\frac{1}{|x|^2 - 1}), & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1. \end{cases}$$

è detta nucleo di regolarizzazione. Si può verificare che $\chi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, c_0 è una costante fissata in modo che

$$\int \chi(x) dx = 1.$$

Per $\epsilon > 0$ si definiscono le funzioni $\chi_\epsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

$$\chi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

che sono di classe C^∞, hanno come supporto $B(0, \epsilon)$ e il loro integrale rispetto alla misura di Lebesgue su tutto $\mathbb{R}^d$ è pari a 1. Se $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ è una funzione una funzione continua a supporto compatto, possiamo definire

$$f_\epsilon(x) = \int \chi_\epsilon(x - y) f(y) dy = \int \chi_\epsilon(y) f(x - y) dy$$

la funzione regolarizzata. Per $\epsilon \to 0$ si ha $f_\epsilon \to f$ uniformemente.

1.3 Misura di Hausdorff

In questa sezione richiamiamo la definizione alcune proprietà basilari della misura di Husdorff; diamo inoltre la definizione di densità di un insieme.

Definizione 1.4 (Misura di Hausdorff)**.** *Dati $\delta \in (0, \infty]$ e $0 < s < d$, si può definire la misura $\mathcal{H}^s_\delta$ in $\mathbb{R}^d$ nel seguente modo. Dato $A \in \mathbb{R}^d$ si pone:*

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \omega_s \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\operatorname{diam}(E_k)}{2} \right)^s \,:\, A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,\ \operatorname{diam}(E_j) < \delta \right\}$$

Si definisce la misura di Hausdorff s-dimensionale $\mathcal{H}^s$ come:

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(A).$$

La misura di Hausdorff ha delle buone proprietà verso traslazioni e dilatazioni. Infatti dati un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$, $a \in \mathbb{R}^d$, $r \geq 0$ ed un qualsiasi $s > 0$, si ha che:

1. $\mathcal{H}^s(A + a) = \mathcal{H}^s(A)$;
2. $\mathcal{H}^s(rA) = r^s \mathcal{H}^s(A)$.

Ciò è dato dal fatto che una famiglia di insiemi $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di A se e solo se $\{E_j + a\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di $A + a$ e $\{rE_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento per rA. Inoltre $\text{diam}(E_j + a) = \text{diam}(E_j)$ e $\text{diam}(rE_j) = r \cdot \text{diam}(E_j)$.

La misura di Hausdorff permette d'introdurre una definizione di dimensione di un insieme. L'apice s infatti indica la potenza alla quale si eleva il diametro degli insiemi di ricoprimento; se è pari a 1 quindi è come se si stessero misurando delle lunghezze, col valore 2 invece, delle aree.

Definizione 1.5 (Dimensione di Hausdorff). *La dimensione di Hausdorff di un insieme $A \subset \mathbb{R}^d$ è:*

$$\begin{aligned} \dim(A) &= \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf\{t \geq 0 : \mathcal{H}^t(A) < \infty\} = \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\}. \end{aligned}$$

La definizione è ben posta in quanto dati $0 \leq s < t < \infty$ si ha:

1. $\mathcal{H}^s(A) < \infty \Rightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0$;
2. $\mathcal{H}^t(A) > 0 \Rightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty$.

Per dimostrare la prima, basta prendere un ricoprimento $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}} \supset A$ tale che per un certo $\delta > 0$ $\text{diam}(E_j) < \delta$ per ogni j e $\omega_s \sum_{j \in \mathbb{N}} \left(\frac{\text{diam}(E_j)}{2}\right)^s \leq \mathcal{H}^s_\delta(A) + 1$. Allora:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^t_\delta(A) &\leq \omega_t \sum_j \left(\frac{\text{diam}(E_j)}{2}\right)^t \leq \delta^{t-s} \frac{\omega_t}{\omega_s} \omega^s \sum_j \left(\frac{\text{diam}(E_j)}{2}\right)^s \\ &\leq \delta^{t-s} \frac{\omega_t}{\omega_s} (\mathcal{H}^s(A) + 1). \end{aligned}$$

Per $\delta \to 0$ si ottiene la tesi. La seconda affermazione si dimostra esattamente allo stesso modo.

In altre parole, la dimensione di Hausdorff è l'unico numero per il quale $s < \dim(A)$ implica $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ e $t > \dim(A)$ implica $\mathcal{H}^t(A) = 0$. Un altra proprietà che verrà utilizzata è:

$$\mathcal{H}^s > 0 \iff \mathcal{H}^s_\infty > 0.$$

E' semplice da osservare: per definizione $\mathcal{H}^s > \mathcal{H}^s_\infty$. Viceversa, se $\mathcal{H}^s > 0$ allora esistono un $\delta > 0$ ed un ϵ tali che $\mathcal{H}^s_\delta > \epsilon$. Quindi, dato un ricoprimento $\{E_j\}_{j=1}^N$ con $N \in \mathbb{N} \cap \{\infty\}$, se $\mathrm{diam}(E_j) < \delta$ per ogni j, allora $\omega_s \sum_j \left(\frac{\mathrm{diam}(E_j)}{2}\right)^s > \epsilon$. Altrimenti se esiste un j_0 pe il quale $\mathrm{diam}(E_{j_0}) > \delta$, allora $\omega_s \sum_j \left(\frac{\mathrm{diam}(E_j)}{2}\right)^s > \omega_s \left(\frac{\delta}{2}\right)^s$.

Siano $0 \leq s < \infty$, $A \subset \mathbb{R}^d$ e $a \in \mathbb{R}^d$. Utilizzando la definizione di densità di una misura applicata alla misura di Haudorff ristretta, possiamo definire le s-densità superiore ed inferiore di A in a rispettivamente come:

$$\theta^{*,s}(A,a) = \limsup_{s\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a,r))}{\omega_s r^s}$$
$$\theta^s_*(A,a) = \liminf_{s\to 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(a,r))}{\omega_s r^s}.$$

Se entrambe le quantità sono uguali, il valore in comune è detto densità di A in a e si indica con $\theta^s(A,a)$.

1.4 Misure di Radon

In questa sezione definiamo la differenziazione e la convergenza debole per le misure di Radon. Diamo inoltre una metrica per esse, seguendo quanto fatto nell'articolo di Nimer [1]; la utilizzeremo con particolare frequenza nell'ultimo capitolo per provare la convergenza debole di successioni di misure di Radon.

Definizione 1.6 (Misura di Radon)**.** *Una misura μ in $\mathbb{R}^d$ è detta di Radon se è una misura di Borel e:*

1. *$\mu(K) < \infty$ per ogni $K \subset \mathbb{R}^d$ compatto;*
2. *$\mu(V) = \sup\{\mu(K) : K \subset V$ compatto$\}$ per ogni $V \subset \mathbb{R}^d$ aperto;*
3. *$\mu(V) = \inf\{\mu(A) : V \subset A$ aperto$\}$ per ogni $V \subset \mathbb{R}^d$.*

Si indica con $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ l'insieme di tutte le misure di Radon in $\mathbb{R}^d$.

Una misura che soddisfa la proprietà (1) è detta localmente finita.

1.4.1 Convergenza debole di misure di Radon

Definizione 1.7 (Convergenza debole)**.** *Siano μ e $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ misure di Radon in $\mathbb{R}^d$. Diciamo che μ_j converge debolmente a μ se per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z)d\mu_j(z) \to \int_{\mathbb{R}^d} f(z)d\mu(z), \text{ per } j \to \infty.$$

Per indicare la convergenza debole si scriverà $\mu_j \rightharpoonup \mu$.

Il seguente teorema varrebbe come "se e solo se", cioè fornirebbe una caratterizzazione della convergenza debole. Tuttavia lo presentiamo soltanto con un'implicazione e sarà l'unica che utilizzeremo.

Teorema 1.2 (Caratterizzazione)**.** *Siano μ e $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ misure di Radon in $\mathbb{R}^d$. Se $\mu_j \rightharpoonup \mu$ allora per ogni compatto $K \subset \mathbb{R}^d$ e ogni aperto $A \subset \mathbb{R}^d$ si ha:*

1. $\mu(K) \geq \limsup_{j\to\infty} \mu_j(K)$;
2. $\mu(A) \leq \liminf_{j\to\infty} \mu_j(A)$.

Dimostrazione. Sia K un compatto di $\mathbb{R}^d$. Siccome μ è misura di Radon, esiste un aperto $V \supset K$ tale che $\mu(K) \geq \mu(V) - \epsilon$ per un certo $\epsilon > 0$ fissato. Esiste una funzione $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ tale che $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ su K e $\text{supp}(\varphi) \in V$. Allora:

$$\begin{aligned}\mu(K) \geq \mu(V) - \epsilon &\geq \int \varphi d\mu - \epsilon \\ &= \lim_{j\to\infty} \int \varphi d\mu_j - \epsilon \geq \limsup_{j\to\infty} \mu_j(K) - \epsilon,\end{aligned}$$

segue la prima disuguaglianza facendo tendere ϵ a 0. La seconda disuguaglianza si ottiene procedendo in modo analogo, approssimando A dall'interno con un compatto. □

Il teorema di rappresentazione di Riesz permette di risalire a delle misure partendo da una funzione su funzioni, mentre il teorema di Stone-Weierstrass conferisce la separabilità dello spazio delle funzioni continue a supporto compatto. Entrambi li utilizzeremo nella dimostrazione del prossimo teorema, quindi li ricordiamo riportandone semplicemente l'enunciato.

Riesz afferma che dato $L : C_c(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ un funzionale lineare positivo. Allora esiste un'unica misura di Radon μ su $\mathbb{R}^d$ tale che per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$:

$$L(f) = \int f d\mu.$$

Si può trovare la dimostrazione in Federer [3], teorema 2.5.13. Riportiamo ora una versione adattata del teorema di Stone-Weierstrass, che si può trovare nel libro di Rudin [6], Teorema 7.32.

Sia $R > 0$ fissato e sia $\mathcal{A}$ un sottoinsieme di $C(\overline{B(0,R)})$ con $\overline{B(0,R)} \subset \mathbb{R}^d$. Se $\mathcal{A}$ soddisfa:

1. Per ogni $f, g \in \mathcal{A}$, si ha $fg, f + g \in \mathcal{A}$;
2. Per ogni $c \in \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{A} \Rightarrow cf \in \mathcal{A}$;
3. Per ogni $x \in B(0,R)$ esiste una funzione $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq 0$;

4. Per ogni $x, y \in B(0,R)$ tale che $x \neq y$, esiste $f \in \mathcal{A}$ tale che $f(x) \neq f(y)$;

allora $\mathcal{A}$ è denso in $C(\overline{B(0,R)})$ rispetto alla topologia della convergenza uniforme.

I polinomi in più variabili ristretti alla palla $\overline{B(0,R)}$ soddisfano alle condizioni date e pertanto rendono lo spazio $C(\overline{B(0,R)})$ dotato della metrica della convergenza uniforme, separabile. Inoltre, ogni polinomio a coefficienti reali ammette una successione di polinomi a coefficienti razionali che convergono a lui uniformemente. Definiamo quindi $D_R := \{P \cdot \chi_{B(0,R)} \, : \, P$ polinomio a coefficienti razionali$\}$ e $D = \bigcup_{R=1}^{\infty} D_R$, insieme numerabile in quanto unione numerabile di insiemi numerabili. Allora per ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ esiste $R > 0$ tale che il supporto di f è contenuto in $B(0,R)$ e quindi esiste una successione di funzioni in D_R che tende uniformemente a f. Questo rappresenta il principio della dimostrazione del teorema che ora enunciamo.

Teorema 1.3 (Sottosuccessioni convergenti)**.** *Sia $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di misure di Radon in $\mathbb{R}^d$ tale che:*

$$\sup_j(\mu_j(K)) = C_K < \infty$$

per ogni insieme compatto $K \subset \mathbb{R}^d$. Allora c'è una sottosuccessione di $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ che converge debolmente.

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio delle funzioni $C_c(\mathbb{R}^d)$ dotato della norma

$$\|\varphi\|_\infty = \max\{|\varphi(x)| : x \in \mathbb{R}^d\},$$

e sia D l'insieme precedentemente definito. Data una $\varphi \in D$, la successione $\int \varphi d\mu_j$ è limitata:

$$\int \varphi d\mu_j \leq \|\varphi\|_\infty C_K$$

per ogni j, quindi ammette una sottosuccessione convergente. Ma allora, utilizzando un metodo diagonale, si può estrarre una sottosuccessione $\{\mu_{j_k}\}_k$ convergente per ogni $\varphi \in D$.

Per quanto detto sulla separabilità di $C_c(\mathbb{R}^d)$, possiamo prendere D in modo che per ogni $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$ con supporto contenuto in $B(0,R)$ per un qualche $R \in \mathbb{N}$, esista una successione di funzioni $\phi_j \in D$ che convergono a ϕ e con supporto contenuto in $B(0,R)$. Per alleggerire la notazione rinominiamo la sottosuccessione $\{\mu_{j_k}\}_k$ con $\{\mu_k\}_{k\in\mathbb{N}}$; per come è stata costruita si ha che per ogni j esiste:

$$L\phi_j := \lim_{k\to\infty} \int \phi_j d\mu_k.$$

Siccome $\{\phi_j\}_j$ è una successione convergente, è anche una successione di Cauchy, quindi dato $\frac{\epsilon}{C_{B(0,R)}}$ esiste J tale che per ogni j_1, $j_2 > J$ vale $\|\phi_{j_1} - \phi_{j_2}\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{C_{B(0,R)}}$.

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}|L\phi_{j_1} - L\phi_{j_2}| &\leq \lim_{k\to\infty} \int |\phi_{j_1} - \phi_{j_2}| d\mu_k \leq \|\phi_{j_1} - \phi_{j_2}\|_\infty \sup_k \{\mu_k(B(0,R))\} \\ &\leq \frac{\epsilon}{C_{B(0,R)}} C_{B(0,R)} = \epsilon,\end{aligned}$$

cioè la successione $\{L\phi_j\}_j$ è reale e di Cauchy, quindi è convergente ad un valore $L\phi$. Ma allora:

$$\begin{aligned}\left|L\phi - \int \phi d\mu_k\right| &\leq \left|L\phi - \int \phi_j d\mu_k\right| + \left|\int \phi_j - \phi d\mu_k\right| \\ &\leq \left|L\phi - \int \phi_j d\mu_k\right| + \|\phi_j - \phi\|_\infty C_{B(0,R)}.\end{aligned}$$

Facendo tendere k a ∞ si ottiene allora:

$$\limsup_k \left|L\phi - \int \phi d\mu_k\right| \leq |L\phi - L\phi_j| + \|\phi_j - \phi\|_\infty C_{B(0,R)},$$

che per $j \to \infty$ porta a:

$$\lim_{k\to\infty} \int \phi d\mu_{j_k} = L\phi.$$

Questo vale per una qualsiasi $\phi \in C_c(\mathbb{R}^d)$, quindi per il teorema di rappresentazione di Riesz esiste una misura limite μ a cui tende debolmente la sottosuccessione. □

1.4.2 Metrizzabilità di $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

Definizione 1.8 (Metrica). *Siano $0 < r < \infty$ e $d \in \mathbb{N}$. Si indica con $\mathcal{L}(r)$ lo spazio delle funzioni Lipschitziane non negative su $\mathbb{R}^d$ con supporto in $B(0,r)$ e costante di Lipschitz minore o uguale a 1. Date due misure di Radon μ e ν su $\mathbb{R}^d$, si definisce*

$$F_r(\mu,\nu) = \sup\left\{\left|\int f d\mu - \int f d\nu\right| : f \in \mathcal{L}(r)\right\}.$$

Si definisce inoltre $\mathcal{F}$ come la funzione

$$\mathcal{F}(\mu,\nu) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} F_k(\mu,\nu).$$

Le F_r soddisfano la disuguaglianza triangolare, di conseguenza la soddisfa anche $\mathcal{F}$, la quale costituisce quindi una metrica per lo spazio delle misure di Radon.

Il seguente Teorema dà una caratterizzazione della convergenza debole che verrà utilizzata nei capitoli successivi. Per la sua dimostrazione ricorriamo al teorema di Ascoli-Arzelà, di cui riportiamo l'enunciato.

Sia $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di funzioni in $C(\mathbb{R}^d)$ che siano:

1. Equicontinue:
$$\begin{aligned}&\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall \epsilon > 0\, \exists \delta > 0\ :\\ &|y-x| < \delta,\ y \in \mathbb{R}^d \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon\ \forall n;\end{aligned}$$

2. Equilimitate:
$$\forall x \in \mathbb{R}^d\, \exists M_x > 0\ :\ |f_n(x)| \leq M_x\ \forall n.$$

Allora esiste una sottosuccessione $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ed una $f \in C(\mathbb{R}^d)$ tale che $f_{n_k} \to f$ per $k \to \infty$ uniformemente sui compatti.

Per maggiori dettagli si può consultare il Brezis [5], Teorema IV.25, il quale rimanderà ad altri testi per una dimostrazione.

Teorema 1.4 (Continuità)**.** *Siano μ e $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ misure di Radon su $\mathbb{R}^d$. Allora sono equivalenti:*

1. $\mu_j \rightharpoonup \mu$*;*

2. $\forall r > 0$, $\lim_{j\to\infty} F_r(\mu_j, \mu) = 0$.

Dimostrazione. (1) $\Rightarrow$ (2)
Fissato $r > 0$, siano μ, ν due misure e $\{f_n\}_n$ una successione di funzioni in $\mathcal{L}(r)$ tali che
$$F_r(\mu,\nu) = \lim_{n\to\infty} \left| \int f_n d\mu - \int f_n d\nu \right|.$$
Per definizione di $\mathcal{L}(r)$ le funzioni f_n sono equicontinue ed equilimitate, quindi soddisfano le ipotesi di Ascoli-Arzelà. Allora esiste una funzione $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ alla quale tendono uniformemente in $\overline{B(0,r)}$; $B(0,r)$ contiene il supporto delle f_n che di conseguenza tendono ad f uniformemente in tutto $\mathbb{R}^d$ ed f stessa risulta avere supporto in $B(0,r)$, essere positiva ed avere una costante di Lipschitz minore o uguale a 1. Significa che $f \in \mathcal{L}(r)$. Si è quindi dimostrato che per ogni μ e ν misure di Radon, esiste una funzione $f \in \mathcal{L}(r)$ tale che
$$F_r(\mu,\nu) = \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right|. \tag{1.1}$$
Sia allora f_j la funzione che soddisfa l'equazione appena dimostrata (1.1) per le misure μ_j e μ. Mostriamo che ogni sottosuccessione di $\{F_r(\mu_j,\mu)\}_j$ c'è una sottosuccessione che converge a 0. Per alleggerire la notazione, sia $\{F_r(\mu_k,\mu)\}_k$ una sottosuccessione, a cui corrisponde la successione $\{f_k\}_k$ in $\mathcal{L}(r)$. Come sopra

fatto, per il teorema di Ascoli-Arzelà si estrae una sottosuccessione $\{f_{k_i}\}_i$ che converge uniformemente ad una $f \in \mathcal{L}(r)$.

$$
\begin{aligned}
F_r(\mu_{k_i}, \mu) &= \left| \int f_{k_i} d\mu_{k_i} - \int f_{k_i} \mu \right| \\
&\leq \int |f_{k_i} - f| d\mu_{k_i} + \int |f_{k_i} - f| d\mu + \left| \int f d\mu_{k_i} - \int f \mu \right| \\
&\leq \|f_{k_i} - f\|_\infty (\mu_{k_i}(\overline{B(0,r)}) + \mu(\overline{B(0,r)})) + \left| \int f d\mu_{k_i} - \int f \mu \right| .
\end{aligned}
$$

Per la caratterizzazione della convergenza debole sui compatti data dal Teorema 1.2 ed essendo le misure localmente finite in quanto di Radon, esiste $C > 0$ tale che $\mu_{k_i}(\overline{B(0,r)}) + \mu(\overline{B(0,r)}) \leq C$ per ogni i. Di conseguenza:

$$
F_r(\mu_{k_i}, \mu) \leq \|f_{k_i} - f\|_\infty C + \left| \int f d\mu_{k_i} - \int f \mu \right| ;
$$

il membro a destra tende a 0 per $i \to \infty$ per la convergenza uniforme delle f_{k_i} a f e per la convergenza debole delle μ_{k_i} a μ.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Siano $r > 0$, f una qualsiasi funzione Lipschitziana positiva a supporto contenuto in $B(0,r)$ e $c = Lip(f)$. Dal momento che $\frac{1}{c} f$ è 1-Lpschitziana, quindi sta in $\mathcal{L}(r)$, si ha:

$$
\left| \int f d\mu_j - \int f d\mu \right| = c \left| \int \frac{f}{c} d\mu_j - \int \frac{f}{c} d\mu \right| \leq c F_r(\mu_j, \mu) \to 0
$$

per $j \to \infty$. Siano ora $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, χ il nucleo di regolarizzazione e consideriamo la regolarizzazione di f

$$
f_\epsilon = \int \chi(x-y) f(y) dy.
$$

Siccome f è a supporto compatto, f_ϵ converge uniformemente a f per $\epsilon \to 0$. $f_\epsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, quindi una qualsiasi derivata parziale è una funzione continua a supporto compatto, di conseguenza limitata. Esiste allora C_ϵ tale che $\|\nabla f_\epsilon\|_\infty \leq C_\epsilon$, che implica la Lipschitzianità di f_ϵ. Sia $r > 0$ tale che definitivamente $\mathrm{supp}(f_\epsilon), \mathrm{supp}(f) \subset B(0,r)$; la dimostrazione del Teorema 1.2 può essere fatta prendendo una $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^d)$ per approssimare l'insieme compatto, quindi è valida per $\{\mu_j\}_j$ e μ di questo teorema che soddisfano (2), di conseguenza esiste

$K > 0$ tale che $\mu_j(\overline{B(0,r)}) + \mu(\overline{B(0,r)}) \leq K$ per ogni j. Allora:

$$\begin{aligned}
\limsup_{j\to\infty} \left| \int f d\mu_j - \int f d\mu \right| &\leq \limsup_{j\to\infty} \left(\int |f - f_\epsilon| d\mu_j + \int |f - f_\epsilon| d\mu \right) \\
&+ \limsup_{j\to\infty} \left(\left| \int f_\epsilon d\mu_j - \int f_\epsilon d\mu \right| \right) \\
&\leq \limsup_{j\to\infty} (\|f - f_\epsilon\|_\infty (\mu_j(\overline{B(0,r)})) + \mu(\overline{B(0,r)})) + 0 \\
&\leq \|f - f_\epsilon\|_\infty K \to 0
\end{aligned}$$

per $\epsilon \to 0$. Si è quindi dimostrata la convergenza debole della successione $\{\mu_j\}_j$ a μ. □

1.4.3 Differenziazione di misure di Radon

Quanto trattiamo in questa sottosezione lo utilizziamo unicamente nel Teorema 2.6, per darne la dimostrazione.

Siano μ e ν due misure localmente finite e di Borel su $\mathbb{R}^d$. Le derivate superiore ed inferiore di μ rispetto a ν in $x \in \mathbb{R}^d$ si definiscono rispettivamente come:

$$\begin{aligned}
\overline{D}(\mu, \nu, x) &= \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))} \\
\underline{D}(\mu, \nu, x) &= \liminf_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{\nu(B(x,r))}.
\end{aligned}$$

Se i due limiti coincidono, il valore comune si chiama derivata di μ rispetto a ν in x e si indica con $D(\mu, \nu, x)$.

Teorema 1.5 (Integrale della derivata)**.** *Siano μ e ν due misure di Radon su $\mathbb{R}^d$.*

1. *La derivata $D(\mu, \nu, x)$ esiste ed è finita per ν-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$;*

2. *Per ogni $B \subset \mathbb{R}^d$ boreliano,*

$$\int_B D(\mu, \nu, x) d\nu(x) \leq \mu(B)$$

   e vale l'uguaglianza se $\mu \ll \nu$;

3. *$\mu \ll \nu$ se e solo se $\underline{D}(\mu, \nu, x) < \infty$ per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$.*

La dimostrazione la si può trovare nel libro di Mattila [2].

1.5 Sottovarietà di $\mathbb{R}^d$

Siccome la utilizzeremo spesso quando studieremo i supporti delle misure n-uniformi, riportiamo in seguito la definizione di sottovarietà che utilizzeremo in questo lavoro. Riportiamo anche le formule di area e di coarea e concludiamo questa sezione con un calcolo della densità per una sottovarietà.

Ricordiamo che insieme $M \subset \mathbb{R}^d$ è una sottovarietà differenziabile di $\mathbb{R}^d$ di dimensione n e di classe C^k se per ogni $x \in M$ esistono un $r > 0$, un aperto A di $\mathbb{R}^n$ ed una funzione $\varphi : A \to M \cap B(x,r)$ tale che:

1. $\varphi \in C^k(A, M \cap B(x,r))$;
2. $\varphi : A \to M \cap B(x,r)$ è una biezione;
3. $\text{rango}(d\varphi(\xi)) = n$ per ogni $\xi \in A$;
4. $\varphi^{-1} : M \cap B(x,r) \to A$ è continua, ossia φ è aperta.

La funzione φ è detta parametrizzazione (regolare) di M.

Dato $x \in M$ e data una sua parametrizzazione regolare φ tale che $\varphi(\xi) = x$, definiamo T_xM lo spazio tangente a M in x come l'immagine del differenziale di φ in ξ, ossia

$$T_xM = \{d\varphi(\xi)x \, : \, x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Dati $x \in M$, $r > 0$ sufficientemente piccolo ed una base ortonormale $\{v_1, ..., v_n\}$ per T_xM, esistono un aperto $G_r \subset \mathbb{R}^n$ ed una parametrizzazione $F : G_r \to M \cap B(x,r)$ tale che

$$F(\xi) = x + \xi_1 v_1 + ... + \xi_n v_n + F_{n+1}(\xi)v_{n+1} + ... + F_d(\xi)v_d$$

con $\{v_{n+1}, ..., v_d\}$ un completamento di $\{v_1, ..., v_n\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^d$. In questo modo $F(0) = x$ e $dF_k(0) = 0$ per ogni $k = n+1, ..., d$.

Una generalizzazione di varietà si ottiene con la rettificabilità.

Definizione 1.9 (Insieme rettificabile)**.** *Sia $M \subset \mathbb{R}^d$ $\mathcal{H}^n$-misurabile e tale che $\mathcal{H}^n(M) < \infty$. Allora M si dice $n-$rettificabile se esiste un insieme numerabile di sottovarietà $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di classe C^1 e dimensione n in $\mathbb{R}^d$ tale che:*

$$\mathcal{H}^n\left(M \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i\right) = 0.$$

Si suppone senza perdere di generalità che l'intersezione tra due sottovarietà distinte della famiglia che rettifica l'insieme abbia misura $\mathcal{H}^n$ nulla; allora per la numerabilità della famiglia stessa anche l'insieme dei punti in cui s'intersecano (almeno) due sottovarietà $\{M_i \cap M_j \, : \, i \neq j\}$ ha misura $\mathcal{H}^n$ nulla. Ciò significa che per $\mathcal{H}^n$-quasi ogni punto di M passa una sola sottovarietà M_j della famiglia.

1.5.1 Formule di Area e Coarea

Teorema 1.6 (Formula dell'area). *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^d$ una funzione di classe C^1 e biettiva, con $n < d$. Allora per ogni boreliano $A \subset \mathbb{R}^n$ e per ogni funzione boreliana $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ si ha:*

$$\int_A g(f(\xi))Jf(\xi)d\xi = \int_{f(A)} g(x)\mathcal{H}^n(x),$$

con

$$Jf(A) = \sqrt{\det((df(x))^* \circ df(x))}$$

e $df(x)^*$ è l'aggiunta di $df(x)$.

Dato un insieme n-rettificabile M con $\{M_j\}_j$ la famiglia di sottovarietà che lo rettifica, per $\mathcal{H}^n$-quasi ogni $x \in M$ esiste un solo j per il quale $x \in M_j$; si può allora prendere T_xM come piano tangente ad M in x il piano tangente ad M_j in x. Una funzione Lipschitziana $f : M \to \mathbb{R}$ è differenziabile quasi ovunque, quindi definiamo il differenziale $d^M f : T_xM \to \mathbb{R}$ come il differenziale di f applicato ai vettori del tangente.

Teorema 1.7 (Formula di coarea). *Siano $M \subset \mathbb{R}^d$ insieme n-rettificabile e $f : M \to \mathbb{R}^m$, $m < n \leq d$, una funzione Lipschitziana. Allora per ogni funzione di Borel non negativa $g : M \to \mathbb{R}$ si ha:*

$$\int_M g(x)J_M^* f(x)d\mathcal{H}^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{f^{-1}\cap M} g(z)d\mathcal{H}^{n-m}(z)dy.$$

con $J_M^* f(x) = \sqrt{\det(d^M f(x) \circ (d^M f(x))^*)}$.

Un'importante applicazione della formula di coarea è l'integrazione sferica. Prendendo infatti $M = \mathbb{R}^d$ e $f = |\cdot| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ e fissata una base di $\mathbb{R}^d$, si ottiene che $\mathrm{Jac}(f(x)) = \frac{x^t}{|x|}$. Di conseguenza

$$J_M^* = \sqrt{\det\left(\frac{x^t x}{|x|^2}\right)} = 1 \tag{1.2}$$

e la formula dà allora:

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\partial B(0,\rho)} g(z)d\mathcal{H}^{n-1}(z)d\rho.$$

1.5.2 Densità di una sottovarietà

Sia M una sottovarietà di $\mathbb{R}^d$ di classe C^1 e dimensione n. Allora ogni suo punto ha densità 1. Fissato $y_0 \in M$, sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormale per $T_{y_0}M$ che completiamo ad una base $\{v_1, ..., v_d\}$ di $\mathbb{R}^d$, la quale viene presa come riferimento. Partendo da una generica parametrizzazione di un intorno di y_0, esistono un $R > 0$, un aperto $U_R \subset \mathbb{R}^n$ ed una funzione $F : U_R \to M \cap B(y_0, R)$ biettiva e di classe C^1 della seguente forma:

$$F(x_1, ..., x_n) = y_0 + (x_1, ..., x_n, F_{n+1}(x_1, ..., x_n), ..., F_d(x_1, ..., x_n)).$$

Allora $F_i(0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(0) = 0$ per ogni $i = n+1, ..., d$. Posti $\tilde{F} := (F_1, ..., F_d)$, e $U_r := F^{-1}(M \cap B(0, r))$ per ogni $r \leq R$, si ha che $U_r \subset B(0, r)$ e per continuità del determinante, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $r_\epsilon > 0$ tale che per ogni $r \leq r_\epsilon$ vale la seguente stima:

$$\begin{aligned}
|JF(x) - 1| &= \left| \sqrt{\det((\mathrm{Jac}(F(x)))^t \mathrm{Jac}(F(x)))} - 1 \right| \\
&= \left| \sqrt{\det(\mathbb{I}_n + (\mathrm{Jac}(\tilde{F}(x)))^t \mathrm{Jac}(\tilde{F}(x)))} - 1 \right| \\
&\leq \epsilon
\end{aligned}$$

per ogni $x \in B(0, r)$. Utilizzando allora la formula dell'area, si ottiene che:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(M \cap B(y_0, r)) = \mathcal{H}^n(F(U_r)) &= \int_{U_r} JF(x) dx \\
&\leq (1 + \epsilon) \int_{U_r} dx \leq (1 + \epsilon) \int_{B(0,r)} dx \\
&= (1 + \epsilon) \omega_n r^n.
\end{aligned}$$

Sviluppando con Taylor $\tilde{F}$ si ottiene che $\tilde{F}(x) = 0 + d\tilde{F}(\xi)(x)$ per una qualche ξ nel segmento che congiunge 0 con x. Dato $k > 0$, per continuità di $\tilde{F}$ esiste un r_k tale che per ogni $r \leq r_k$ e per ogni $\xi \in B(0, r)$ si ha $\|d\tilde{F}(\xi)\| \leq \frac{1}{k}$, con $\| \cdot \|$ la norma indotta da quella Euclidea. Quindi:

$$\begin{aligned}
|F(x)|^2 = |x|^2 + |\tilde{F}(x)|^2 &\leq |x|^2 + \|d\tilde{F}(\xi)\|^2 |x|^2 \\
&\leq |x|^2 \left(1 + \frac{1}{k^2}\right) = |x|^2 \frac{k^2 + 1}{k^2}.
\end{aligned}$$

Prendendo $r \leq \min(r_k, r_\epsilon)$, si ottiene che $B(0, r\frac{k^2}{k^2+1}) \subset U_r$ e inoltre:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^n(M \cap B(y_0, r)) = \mathcal{H}^n(F(U_r)) &= \int_{U_r} JF(x) dx \\
&\geq (1 - \epsilon) \int_{U_r} dx \geq (1 - \epsilon) \int_{B\left(0, r\frac{k^2}{k^2+1}\right)} dx \\
&= (1 - \epsilon) \omega_n r^n \left(\frac{k^2}{k^2 + 1}\right)^n.
\end{aligned}$$

Per ogni ϵ e per ogni k allora definitivamente:

$$(1-\epsilon)\left(\frac{k^2}{k^2+1}\right)^n \leq \frac{\mathcal{H}^n(M \cap B(y_0, r))}{\omega_n r^n} \leq (1+\epsilon)$$

da cui si deduce che $\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^n(M\cap B(y_0,r))}{\omega_n r^n} = 1$.

Capitolo 2

Misure n-uniformi

Questo capitolo si apre con una sezione dedicata alle misure tangenti. Esse sono state introdotte da Preiss [4] nel modo in cui qui le presentiamo. Fare la tangente di una misura è un po' come fare la derivata di una funzione e proprio come quest'ultima ci permette di studiare alcune proprietà locali della misura. Segue poi la definizione delle misure n-uniformi ed il loro rapporto con le misure di Hausdorff. Infine questo capitolo si chiude con lo studio di un caso particolare di misure uniformi, le misure coniche, di cui studiamo la componente sferica. Alcune proprietà di quest'ultima, nel caso particolare delle misure 3-uniformi, ci permetteranno di ottenere un risultato importante sulla struttura del loro supporto. Dimostreremo infatti che nel caso di una misura conica 3-uniforme, il supporto escluso lo 0 è una sottovarietà 3-dimensionale.

2.1 Misure tangenti

Siano μ una misura di Radon e Σ il suo supporto; dato un punto $x \in \mathbb{R}^d$ ed un $r > 0$, definiamo la misura $T_{x,r}[\mu]$ in questo modo:

$$T_{x,r}[\mu](A) := \mu(rA + x)$$

per ogni $A \subset \mathbb{R}^d$; il supporto di $T_{x,r}[\mu]$ è:

$$\frac{\Sigma - x}{r}.$$

Definizione 2.1 (Misura tangente)**.** *Siano μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^d$ e $x \in \mathbb{R}^d$. Una misura ν si dice tangente a μ in x se è una misura di Radon ed esistono due successioni $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ e $\{c_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di numeri positivi tali che $r_i \downarrow 0$ e*

$$c_i T_{x,r_i}[\mu] \rightharpoonup \nu$$

per $i \to \infty$. Con $Tan(\mu, x)$ si indica l'insieme di tutte le misure tangenti a μ in x.

Se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che:

$$0 < \theta_*^n(\mu, x_0) \leq \theta^{*,n}(\mu, x_0) < \infty,$$

allora per ogni $\nu \in Tan(\mu, x_0)$ esistono una successione $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ con $r_i \downarrow 0$ ed una costante $c > 0$ tali che (in senso debole):

$$\nu = c \lim_{i\to\infty} r_i^{-n} T_{x_0,r_i}[\mu]. \tag{2.1}$$

Siano infatti $\{c_i\}_i$ e $\{r_i\}_i$ due successioni tali che $r_i \downarrow 0$ e $c_i T_{x_0,r_i}[\mu] \rightharpoonup \nu$ e sia $R > 0$ tale che $\nu(B(0,R)) > 0$. Per il Teorema 1.2 sulla caratterizzazione della convergenza debole:

$$\begin{aligned}
0 < \nu(B(0,R)) &< \liminf_{i\to\infty} c_i T_{x_0,r_i}[\mu](B(0,R)) \\
&= \liminf_{i\to\infty} c_i \omega_n (Rr_i)^n \frac{\mu(B(x_0,Rr_i))}{\omega_n (Rr_i)^n} \\
&\leq \liminf_{i\to\infty} c_i \omega_n (Rr_i)^n \limsup_{i\to\infty} \frac{\mu(B(x_0,Rr_i))}{\omega_n (Rr_i)^n} \\
&= \liminf_{i\to\infty} c_i \omega_n (Rr_i)^n \theta^{*,n}(\mu, x_0),
\end{aligned}$$

quindi $\liminf_{i\to\infty} c_i \omega_n (Rr_i)^n > 0$. Analogamente, siccome ν è di Radon e di conseguenza localmente finita, si ha

$$\infty > \nu(\overline{B(0,R)}) \geq \limsup_{i\to\infty} c_i T_{x_0,r_i}[\mu](\overline{B(0,R)}) \geq \limsup_{i\to\infty} c_i T_{x_0,r_i}[\mu](B(0,R))$$

e quindi come sopra $\limsup_{i\to\infty} c_i \omega_n (Rr_i)^n < \infty$. Si può quindi estrarre una sottosuccessione di $\{r_i\}_i$, che per semplicità continuiamo a indicizzare allo stesso modo, per la quale esiste finito e positivo $c := \lim_{i\to\infty} c_i r_i^n$. Si ottiene allora la tesi:

$$\begin{aligned}
\nu &= \lim_{i\to\infty} c_i T_{x_0,r_i}[\mu] \\
&= \lim_{i\to\infty} c_i r_i^n r_i^{-n} T_{x_0,r_i}[\mu] \\
&= c \lim_{i\to\infty} r_i^{-n} T_{x_0,r_i}[\mu].
\end{aligned}$$

Dal momento che si useranno prevalentemente misure uniformi, per la misura tangente si utilizzerà la formula (2.1) per il limite debole.

Le sottovarietà di classe C^1 sono localmente un grafico di una funzione tramite il cui differenziale ricaviamo i piani tangenti. Un concetto analogo a quello di piano tangente esiste anche per le misure; come mostreremo coi Teoremi 2.4 e 2.7 una misura uniforme ha quasi ovunque come misura tangente una misura piatta.

Definizione 2.2 (Misure e punti piatti)**.** *Una misura in $\mathbb{R}^d$ è detta n-piatta se è uguale a $c\mathcal{H}^n \llcorner V$, con V un n-piano di $\mathbb{R}^d$ e $0 < c < \infty$.*

Siano μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ e $x \in \Sigma$. Si dice che x è un punto piatto di Σ se esiste un n-piano V tale che:

$$Tan(\mu, x) = \{c\mathcal{H}^n \llcorner V \, : \, c > 0\}.$$

Un punto non piatto è detto punto singolare.

2.1.1 Proprietà di $T_{x,r}[\mu]$

Nel corso delle successive dimostrazioni utilizziamo spesso le misure tangenti e di conseguenza le misure $T_{x,r}[\mu]$. Riportiamo allora qui alcune loro proprietà.

Siano μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$, $r > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^d$. Allora:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \chi_A(z) dT_{x,r}[\mu](z) = T_{x,r}[\mu](A) = \mu(rA + x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_A\left(\frac{z-x}{r}\right) d\mu(z).$$

Dal momento che ogni funzione misurabile positiva può essere approssimata da una somma crescente di funzioni della forma $a\chi_A$ per opportuni insiemi A e coefficienti a, siccome le parti positive e negative di una funzione sono misurabili, utilizzando la convergenza monotona si dimostra che per ogni funzione misurabile f vale:

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(z) dT_{x,r}[\mu] = \int_{\mathbb{R}^d} f\left(\frac{z-x}{r}\right) d\mu(z).$$

Dati $r_0 > 0$ e $y \in \mathbb{R}^d$, vale la seguente regola per la composizione:

$$T_{y,r_0} \circ T_{x,r}[\mu](A) = T_{y,r_0}[T_{x,r}[\mu]](A) = T_{x,r}[\mu](r_0 A + y) = \mu(r(r_0 A + y) + x).$$

Osserviamo infine che, dato $R > 0$, per ogni f in $\mathcal{L}(R)$:

$$\begin{aligned} \left| \int f(y) dT_{x,r}[\mu] - \int f(y) dT_{x,r_0}[\mu] \right| &\leq \int \left| f\left(\frac{y-x}{r}\right) - f\left(\frac{y-x}{r_0}\right) \right| d\mu(y) \\ &\leq \int_{B(x,rR)} \left| \frac{y-x}{r} - \frac{y-x}{r_0} \right| d\mu(y) \\ &\leq rR\mu(B(x,rR)) \left| \frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right| \to 0 \end{aligned}$$

per $r \to r_0$. Quindi per l'equivalenza mostrata nel Teorema 1.4 si ha $T_{x,r}[\mu] \rightharpoonup T_{x,r_0}[\mu]$.

2.2 Misure uniformi

Definizione 2.3 (Misure uniformi)**.** *Sia μ una misura di Radon in $\mathbb{R}^d$ e sia Σ il suo supporto. Si dice che μ è:*

1. *Uniformemente distribuita se esiste una funzione $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tale che*

$$\mu(B(x,r)) = \phi(r)$$

   per ogni x in Σ e per ogni $r > 0$. ϕ è chiamata funzione di distribuzione di μ;

2. *n-uniforme se è uniformemente distribuita ed esiste $c > 0$ tale che $\phi(r) = cr^n$;*

3. *Conica n-uniforme se è n-uniforme e $T_{0,r}[\mu] = r^n\mu$ per ogni $r > 0$.*

Se μ è una misura conica allora, per definizione, $\Sigma = \frac{\Sigma}{r}$ per ogni $r > 0$. Questo significa che per una misura conica, se x è un punto del supporto, lo è pure tx per ogni $t > 0$. Il supporto inoltre è un insieme chiuso, quindi 0 sta nel supporto di ogni misura conica.

Il seguente teorema legittima il calcolo della misura tangente nel caso di una misura uniforme, mostrandone l'esistenza e l'unicità per una qualsiasi successione di raggi decrescenti. La sua dimostrazione è in [4], Teorema 3.11.

Teorema 2.1 (Unicità del tangente)**.** *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$. Allora:*

1. *Esiste un'unica misura λ n-uniforme conica tale che*

$$r^{-n}T_{x,r}[\mu] \rightharpoonup \lambda \text{ per } r \to \infty$$

   per ogni $x \in \mathbb{R}^d$. λ è detta misura tangente di μ ad ∞. Poniamo $Tan(\mu,\infty) := \{c\lambda : c > 0\}$;

2. *Per ogni x nel supporto di μ esiste un unica misura λ_x n-uniforme conica tale che*

$$\lim_{r\to 0} r^{-n}T_{x,r}[\mu] = \lambda_x.$$

   Di conseguenza $Tan(\mu,x) = \{c\lambda_x : c > 0\}$.

In entrambi i casi, la misura tangente $c\lambda$ tale che $c\lambda(B(0,1)) = \omega_n$ è detta tangente normalizzata.

2.2.1 Un funzionale per $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$

Nel lavoro di De Lellis [7] viene ripreso un funzionale introdotto da Preiss [4] che misura quanto distante è una misura dall'essere piatta. Lo usiamo soprattutto nel terzo capitolo, in cui indaghiamo sui punti singolari del supporto delle misure e quindi abbiamo bisogno di un criterio per stabilire se un punto è o no piatto. Per i teoremi che ora elenchiamo facciamo quindi riferimento a [7].

Definizione 2.4. *Sia data una funzione $\varphi \in C_c(B(0,2))$, $B(0,2) \subset \mathbb{R}^d$ tale che $\chi_{B(0,1)} \leq \varphi \leq \chi_{B(0,2)}$. Possiamo allora definire il funzionale $F : \mathcal{M}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}$ come*

$$F(\mu) = \min_{V \in G(n,d)} \int \varphi(z) \mathrm{dist}^2(z,V) d\mu(z).$$

Teorema 2.2 (Continuità). *Siano $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, μ delle misure di Radon in $\mathbb{R}^d$ tali che $\mu_j \rightharpoonup \mu$. Allora $F(\mu_j) \to F(\mu)$.*

Sia μ è una misura piatta in $\mathbb{R}^d$ e siano $V \in G(n,d)$ $c > 0$ tali che $\mu = \mathcal{H}^n \llcorner V$. Allora $F(\mu) = 0$. Analogamente $F(T_{0,r}[\mu]) = 0$, dal momento che $\mathrm{supp}(T_{0,r}[\mu]) = \frac{V}{r} = V$.

Teorema 2.3. *Siano μ una misura uniforme in $\mathbb{R}^d$ e λ la sua misura tangente normalizzata a ∞. Se $n \geq 3$ allora esiste un ϵ_0 dipendente unicamente da n e da d tale che*

$$F(\lambda) \leq \epsilon_0 \Rightarrow \mu \text{ è piatta.}$$

Notiamo che se μ è anche conica allora $r^{-n}T_{0,r}[\mu] = \mu$ per ogni $r > 0$, quindi $\lambda = \mu$ e di conseguenza basta calcolare $F(\mu)$.

2.2.2 Regolarità del supporto di misure uniformi

Nell'articolo [8] viene dimostrato il teorema sulla regolarità dei supporti di misure che qui riportiamo. Il teorema di Nimer, che dimostriamo nel prossimo capitolo, aggiunge una limitazione alla dimensione di Hausdorff dell'insieme singolare.

Poniamo

$$\theta_\Sigma(x,r) = \frac{1}{r} \inf \left\{ D\left[\Sigma \cap \overline{B(x,r)}, L \cap \overline{B(x,r)}\right] \,:\, L \text{ } n\text{-piano affine per } x \right\}.$$

Teorema 2.4 (Regolarità). *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con $\Sigma = \mathrm{supp}(\mu)$.*

1. *Se $n = 1, 2$ allora Σ è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione n di $\mathbb{R}^d$;*

2. *Se $n \geq 3$ allora $\mathcal{R} = \{x \in \Sigma : \limsup_{r\to 0} \theta_\Sigma(x,r) = 0\}$ è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione n in $\mathbb{R}^d$ e $\mathcal{H}^n(\Sigma \backslash \mathcal{R}) = 0$.*

Il seguente teorema mostra come il supporto di misure n-uniformi che tendono debolmente ad una misura di Radon si avvicini al supporto di quest'ultima. Lo usiamo per dimostrare l'inclusione (2.2), la quale permette di dimostrare il Teorema 2.3, che identifica i punti nella parte regolare $\mathcal{R}$ del Teorema 2.4 appena mostrato con i punti piatti. La dimostrazione del seguente teorema può essere trovata in [9] Teorema III.5.9.

Teorema 2.5 (Avvicinamento supporti). *Sia $\{\mu_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una successione di misure n-uniformi in $\mathbb{R}^d$, con la stessa costante $c > 0$ e che converge debolmente ad una misura di Radon ν. Allora per ogni palla $B \subset \mathbb{R}^d$ (indifferentemente aperta o chiusa) si ha:*

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sup_{x\in B\cap \operatorname{supp}(\nu)} \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\mu_j))\right) = 0$$

$$\lim_{j\to\infty}\left(\sup_{x\in B\cap \operatorname{supp}(\mu_j)} \operatorname{dist}(x, \operatorname{supp}(\nu))\right) = 0.$$

Corollario 2.1. *Sia μ una misura n-uniforme su $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ, allora:*

$$\{x \in \Sigma \,:\, \limsup_{r\to 0} \theta_\Sigma(x, r) = 0\} \supset \{x \in \Sigma \,:\, x \text{ è punto piatto.}\}. \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Sia $\nu = c\mathcal{H}^n \llcorner V$ la misura piatta tale che $\mu_r = r^{-n}T_{x,r}[\mu] \rightharpoonup \nu$, vale

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}D\left[\Sigma \cap \overline{B(x,r)}, (V + x) \cap \overline{B(x,r)}\right] &= D\left[\frac{\Sigma - x}{r} \cap \overline{B(0,1)}, \frac{V}{r} \cap \overline{B(0,1)}\right]\\ &= D\left[\frac{\Sigma - x}{r} \cap \overline{B(0,1)}, V \cap \overline{B(0,1)}\right]\end{aligned}$$

e $\frac{\Sigma-x}{r}$ è proprio il supporto di μ_r. Dati $x \in \frac{\Sigma-x}{r} \cap \overline{B(0,1)}$ e $y \in V$ tale che $|x - y| = \operatorname{dist}(x, V)$, allora $y \in \overline{B(0,1)}$ perché $(x - y) \perp y$ e quindi per Pitagora $|y|^2 = |x|^2 - |x-y|^2 \leq |x|^2 \leq 1$. Ciò significa che $\operatorname{dist}(x, V) = \operatorname{dist}(x, V \cap \overline{B(0,1)})$ e quindi per il Teorema 2.5 si ha

$$\lim_{r\to 0}\left(\sup_{x\in \frac{\Sigma-x}{r}\cap\overline{B(0,1)}} \operatorname{dist}(x, V \cap \overline{B(0,1)})\right) = 0$$

Sempre per il Teorema 2.5 si ha che per ogni $\eta > 0$ esiste un $r_0 > 0$ tale che per $r \leq r_0$

$$\sup_{x\in V\cap\overline{B(0,1)}} \operatorname{dist}\left(x, \frac{\Sigma - x}{r}\right) \leq \eta.$$

Dato $x \in V \cap \overline{B(0,1)}$ e posto $y_x \in \overline{\frac{\Sigma - x}{r}}$ tale che $|x - y_x| = dist\left(x, \frac{\Sigma - x}{r}\right)$, se $\mathrm{dist}(x, \partial B(0,1)) \geq \eta$, allora $y_x \in \overline{B(0,1)}$. Se invece $\mathrm{dist}(x, \partial B(0,1)) < \eta$, sia $x_0 \in V \cap \overline{B(0,1)}$ tale che $|x - x_0| \leq \eta$ e $\mathrm{dist}(x, \partial B(0,1) \geq \eta$. Allora:

$$|x - y_{x_0}| \leq |x - x_0| + |x_0 - y_{x_0}| \leq 2\eta$$

e $y_0 \in \frac{\Sigma - x}{r} \cap \overline{B(0,1)}$. Ne consegue che

$$\sup_{x \in V \cap \overline{B(0,1)}} \mathrm{dist}\left(x, \frac{\Sigma - x}{r} \cap \overline{B(0,1)}\right) \leq 2\eta,$$

quindi per $r \to 0$ tale quantità tende a 0. Mettendo assieme quanto trovato, otteniamo che

$$\limsup_{r \to 0} D\left[\frac{\Sigma - x}{r} \cap \overline{B(0,1)}, V \cap \overline{B(0,1)}\right] = 0.$$

Abbiamo quindi dimostrato l'inclusione (2.2). $\square$

2.3 Rapporto tra misure uniformi e di Hausdorff

In questa sezione enunciamo e dimostriamo il teorema che lega le misure di Hausdorff e le misure uniformi. Successivamente, sfruttiamo la regolarità del supporto data dal Teorema 2.4 e la formula dell'area espressa nel Teorema 1.6 per dimostrare che un punto del supporto di una misura uniforme è regolare se e solo se è un punto piatto.

Teorema 2.6. *Siano μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con $\Sigma = \mathrm{supp}(\mu)$ e $c > 0$ tale che $\mu(B(x,r)) = cr^n$ per ogni $x \in \Sigma$. Allora*

$$\mu = c\omega_n^{-1} \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma.$$

Dimostrazione. Dal momento che μ è una misura n-uniforme, per il Teorema 2.4, Σ è una sottovarietà C^1 intorno a $\mathcal{H}^n$-quasi ogni suo punto. Allora $\theta(\Sigma, x) = 1$ per $\mathcal{H}^n$-quasi ogni $x \in \Sigma$. Per ogni $x \in \Sigma$ si ha $\theta^n(\mu, x) = c\omega_n^{-1}$, quindi per μ-quasi ogni $x \in \mathbb{R}^d$ la densità esiste positiva e finita.

Vale $\mu \ll \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$. Sia infatti $E \subset \mathbb{R}^d$ tale che $0 = \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma(E) = \mathcal{H}^n(E \cap \Sigma)$. Questo significa che per ogni $\epsilon > 0$ esiste una famiglia di palle $\{B_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}^d$ di raggio r_i tali che $E \cap \Sigma \subset \bigcup_i B_i$ e

$$\frac{\omega_n}{2^n} \sum_i r_i^n \leq \frac{\omega_n}{c 2^n} \epsilon.$$

Di conseguenza

$$\begin{aligned}\mu(E) = \mu(E \cap \Sigma) &\leq \mu\left(\bigcup_i B_i\right) \leq \sum_i \mu(B_i) \\ &= c\sum_i r_i^n \leq \epsilon;\end{aligned}$$

per l'arbitrarietà di ϵ abbiamo $\mu(E) = 0$. Per definizione:

$$\begin{aligned}D(\mu, \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma, x) &= \theta^n(\mu, x)\theta^n(\Sigma, x) \\ &= c\omega_n^{-1} \cdot 1\end{aligned}$$

per ogni $x \in \Sigma$, altrimenti $D(\mu, \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma, x) = 0$. Tenendo conto dell'assoluta continuità, il Teorema 1.5 dice che per ogni $A \subset \mathbb{R}^d$ di Borel:

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \int_A D(\mu, \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma, x) d\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma(x) \\ &= c\omega_n \int_A d\mathcal{H}^n \llcorner \Sigma(x) \\ &= c\omega_n^{-1}\mathcal{H}^n(A \cap \Sigma),\end{aligned}$$

da cui $\mu = c\omega_n \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$. □

2.3.1 Sottovarietà e punti piatti

Usiamo il Teorema 2.6 per mostrare che ogni punto nella parte regolare del supporto di una misura n-uniforme è un punto piatto.

Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ; per il Teorema 2.4 sappiamo che $\mathcal{R} = \{x \in \Sigma : \limsup_{r\to 0} \theta(x, r) = 0\}$ è una varietà C^1 di dimensione n in $\mathbb{R}^d$. Siano allora $x_0 \in \mathcal{R}$ e V il piano dei vettori tangenti a $\mathcal{R}$ in x. Posta $\mu_r = \frac{1}{r^n} T_{x_0,r}[\mu]$, vogliamo mostrare che $\mu_r \rightharpoonup \mathcal{H}^n \llcorner V$ per $r \to 0$. Ossia data $g \in C_c(\mathbb{R}^d)$, dimostreremo che

$$\lim_{r\to 0} \int g d\mu_r = \int_V g d\mathcal{H}^n. \tag{2.3}$$

Abbiamo mostrato che:

$$\int g(x) d\mu_r(x) = \int g\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \frac{1}{r^n} d\mu(x).$$

Il supporto di g è un insieme compatto, quindi esiste un $R > 0$ tale che $\mathrm{supp}(g) \subset B(0, R)$ e $\mathrm{dist}(\mathrm{supp}(g), \partial B(0, R)) > 0$. Ma $\frac{x-x_0}{r} \in B(0, R) \Leftrightarrow x \in B(x_0, Rr)$ e per il Teorema 2.6 vale $\mu = \mathcal{H}^n \llcorner \Sigma$, quindi otteniamo:

$$\int g(x) d\mu_r(x) = \int_{B(x_0,Rr)\cap\Sigma} g\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \frac{1}{r^n} d\mathcal{H}^n(x).$$

Sia $\{v_1, ..., v_n\}$ una base ortonormale di vettori tangenti per V, la completiamo ad una base per $\mathbb{R}^d$ di vettori ortonormali $\{v_1, ..., v_d\}$. Siccome Σ è una varietà, per r sufficientemente piccolo esistono un aperto $G_r \subset \mathbb{R}^n$ ed una funzione $F : G_r \to B(x_0, Rr) \cap \Sigma$ di classe C^1 e biettiva tale che

$$F(y) = (y, \tilde{F}(y)) + x_0$$

con $\tilde{F}(y) = (F_{n+1}(y), ..., F_d(y))$ e $\frac{\partial}{\partial x_i} F_j(0) = 0$; per il Teorema 1.6 sulla formula dell'area:

$$\int_{B(x_0,Rr)\cap\Sigma} g\left(\frac{x - x_0}{r}\right) \frac{1}{r^n} d\mathcal{H}^n(x) = \int_{G_r} g\left(\left(\frac{y}{r}, \frac{\tilde{F}(y)}{r}\right)\right) JF(y)dy.$$

Usando Taylor, per un qualche ξ nel segmento che congiunge 0 con y si ha

$$\left|\frac{\tilde{F}(y)}{r}\right| = \left|\frac{\mathrm{Jac}(\tilde{F}(\xi))y}{r}\right| \leq \|\mathrm{Jac}(\tilde{F}(\xi))\| R$$

poichè $|y| \leq Rr$ dal momento che $F(y) \in B(x_0, Rr)$; la norma $\|\cdot\|$ è quella indotta dalla norma Euclidea e per continuità per ogni δ esiste $r_\delta > 0$ tale che per $r < r_\delta$ vale $\|\mathrm{Jac}(\tilde{F}(\xi))\| \leq \frac{\delta}{R}$. Per continuità di g, per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $x \in B\left(\left(\frac{y}{r}, 0\right), \delta\right)$ allora $\left|g(x) - g\left(\frac{y}{r}, 0\right)\right| \leq \epsilon$, quindi per $r < r_\delta$ si ha:

$$\left|g\left(\frac{y}{r}, \frac{\tilde{F}(y)}{r}\right) - g\left(\frac{y}{r}, 0\right)\right| < \epsilon.$$

Per continuità di JF esiste r_ϵ tale che per $r < r_\epsilon$ si ha $|JF(y) - 1| < \epsilon$ e abbiamo già visto che per ogni $k \in \mathbb{N}$ eisiste r_k tale che $B\left(0, \frac{k^2}{k^2+1} Rr\right) \subset G_r$. Prendiamo $r_0 = \min(r_\delta, r_\epsilon, r_k)$, poichè $B(0, Rr) \supset G_r$ per $r < r_0$ vale:

$$\begin{aligned}
\int_{G_r} g\left(\left(\frac{y}{r}, \frac{\tilde{F}(y)}{r}\right)\right) JF(y)dy &\leq \int_{B(0,Rr)} \left(g\left(\frac{y}{r}, 0\right) + \epsilon\right)(1+\epsilon)\frac{1}{r^n} dy \\
&= \int_{B(0,R)} (g(y,0) + \epsilon)(1+\epsilon)dy \\
&= \int_{V\cap B(0,R)} (g(x) + \epsilon)(1+\epsilon)d\mathcal{H}^n(x) \\
&\leq \int_V g(x)d\mathcal{H}^n(x) + c_1\epsilon
\end{aligned}$$

per una qualche costante $c_1 \in \mathbb{R}$. Dal momento che per k sufficientemente grande il supporto di g è contenuto in $B\left(0, \frac{k^2}{k^2+1} R\right)$, con analoghi passaggi si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_{G_r} g\left(\left(\frac{y}{r}, \frac{\tilde{F}(y)}{r}\right)\right) JF(y)dy &\geq \int_{B\left(0, \frac{k^2}{k^2+1} Rr\right)} \left(g\left(\frac{y}{r}, 0\right) - \epsilon\right)(1-\epsilon)\frac{1}{r^n} dy \\
&\geq \int_V g(x)d\mathcal{H}^n(x) + c_2\epsilon
\end{aligned}$$

per una qualche costante $c_2 \in \mathbb{R}$. Per $r \to 0$ si ha $\epsilon \to 0$ e otteniamo la tesi (2.3). Unendo quanto trovato con l'inclusione (2.2), abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 2.7 (Punti piatti)**.** *Sia μ misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ. Allora:*

$$\mathcal{R} = \left\{ x \in \Sigma \, : \, \limsup_{r \to 0} \theta_\Sigma(x, r) = 0 \right\} = \{x \in \Sigma \, : \, x \text{ è punto piatto di } \mu\}.$$

2.4 Componente sferica

In questa sezione vediamo come una misura conica possa essere scomposta in una parte radiale ed una sferica. Il vantaggio è la riduzione di dimensione del supporto della misura.

A meno di rinormalizzazioni, possiamo supporre la costante delle misure pari a 1.

Definizione 2.5 (Componente sferica)**.** *Sia ν una misura conica n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ. Si definisce componente sferica di ν la misura*

$$\sigma = \mathcal{H}^{n-1} \llcorner (\Sigma \cap \partial B(0,1)).$$

Si può scomporre l'integrale rispetto a ν nell'integrale doppio sulla sua componente sferica e su una parte radiale.

Teorema 2.8 (Scomposizione)**.** *Siano ν una misura conica n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ e g una funzione di Borel su $\mathbb{R}^d$. Allora:*

$$\int g(x) d\nu(x) = \int_0^\infty \rho^{n-1} \int g(\rho x) d\sigma(x) d\rho.$$

Dimostrazione. Vogliamo prima provare la tesi per le funzioni $g = \chi_A$, con $A \subset \mathbb{R}^d$ di Borel. Siano $u = |\cdot| : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la norma Euclidea, funzione Lipschitziana, e Σ il supporto di ν, che per il Teorema 2.4 è $\mathcal{H}^n$-quasi ovunque una varietà C^1 n-dimensionale che chiamiamo $\mathcal{R}$. Per il Teorema 1.7 (formula di coarea) allora:

$$\int_{A \cap \Sigma} J^*_\Sigma u(y) d\mathcal{H}^n(y) = \int_0^\infty \int_{u^{-1}(\rho)} \chi_{A \cap \Sigma}(y) d\mathcal{H}^n(y) d\rho. \tag{2.4}$$

Calcoliamo $J^*_\Sigma u(y)$ quando $y \in \mathcal{R}$, fissando delle basi per gli spazi tangenti. Sia P_y lo spazio di vettori tangenti a y in $\mathcal{R}$ e consideriamo la curva $\gamma(t) = t\frac{y}{|y|} + y$ con $t \in (-|y|, \infty)$; poiché ν è una misura conica, $\gamma(t) \in \Sigma$ e quindi $\gamma'(0) = \frac{y}{|y|} \in P_y$. Poniamo $\tau_1 = \frac{y}{|y|}$ e lo completiamo a $\{\tau_1, ..., \tau_d\}$ base ortonormale di P_y. $du(y) =$

τ_1, quindi $d^\Sigma u(y) = (1, 0, ..., 0)$ e di conseguenza $J^*_\Sigma(y) = 1$. Usando la relazione (2.4) si ottiene:

$$\begin{aligned}
\int_{A\cap\Sigma} d\mathcal{H}^n(y) &= \int_{A\cap\Sigma} J^*_\Sigma u(y) d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_0^\infty \int_{u^{-1}(\rho)} \chi_{A\cap\Sigma}(y) d\mathcal{H}^n(y) d\rho \\
&= \int_0^\infty \mathcal{H}^{n-1}(\Sigma \cap A \cap \partial B(0,\rho)) d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}\left(\frac{\Sigma}{\rho} \cap \frac{A}{\rho} \cap \partial B(0,\rho)\right) d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-1} \mathcal{H}^{n-1}\left(\Sigma \cap \frac{A}{\rho} \cap \partial B(0,\rho)\right) d\rho \\
&= \int_0^\infty \rho^{n-1} \int \chi_A(\rho x) d\sigma(x) d\rho
\end{aligned}$$

che è la tesi per le funzioni caratteristica. Per convergenza monotona e linearità la tesi vale allora anche per le funzioni boreliane. □

Per studiare il caso delle misure coniche 3-uniformi usiamo il fatto che la componente sferica di una misura conica eredita l'uniformità. Per dimostrarlo però abbiamo bisogno del seguente teorema, la cui dimostrazione può essere trovata in [4], Teorema 3.10.

Teorema 2.9 (Integrazione)**.** *Siano μ una misura n-uniforme su $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ e $f : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty]$ una funzione boreliana. Allora per ogni $u \in \Sigma$ e per ogni $e \in \mathbb{R}^n$ tali che $|u| = |e|$ vale:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(|z|^2, \langle z, u\rangle) d\mu(z) = C \int_{\mathbb{R}^n} f(|x|^2, \langle x, e\rangle) dx$$

per una qualche $C > 0$.

Teorema 2.10 (Uniformità della componente sferica)**.** *Sia ν una misura conica n-uniforme in $\mathbb{R}^d$. Allora la sua componente sferica σ è uniformemente distribuita.*

Dimostrazione. Siano Ω il supporto di σ e Σ il supporto di ν e siano $x \in \Omega$ e $r > 0$. Definiamo gli insiemi:

1. $N_{(|x|,r)} = \{(a, b) \in [0,\infty) \times \mathbb{R} : (1 + |x|^2 - r^2)a - 2b < 0\}$;

2. $B_r(x) = \partial B(0, 1) \cap B(x, r)$;

3. $(B_r(x))^\epsilon_1 = \{cy : y \in B_r(x), c \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)\}$.

Allora:

$$\begin{aligned} z \in (B_r(x))_1^\epsilon &\iff \left|\frac{z}{|z|} - x\right|^2 < r^2 \text{ e } |z| \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \\ &\iff (1+|x|^2 - r^2)|z| - 2\langle z, x\rangle < 0 \text{ e } |z| \in (1-\epsilon, 1+\epsilon). \end{aligned}$$

Possiamo quindi definire la funzione $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in questo modo:

$$G(a,b) = \chi_{N_{(|x|,r)}}(a,b) \cdot \chi_{(1-\epsilon,1+\epsilon)}(a)$$

e di conseguenza

$$\chi_{(B_r(x))_1^\epsilon}(z) = G(|z|, \langle z, x\rangle).$$

Fissato un qualsiasi $e \in \mathbb{R}^n$ tale che $|e|$=1, siamo nella condizione di poter utilizzare il Teorema 2.9:

$$\begin{aligned} \nu((B_r(x))_1^\epsilon) &= \int G(|z|, \langle z, x\rangle) d\nu(z) \\ &= \int G(|z|, \langle z, e\rangle) dz. \end{aligned}$$

Per definizione:

$$\begin{aligned} (|z|, \langle z, e\rangle) \in N_{(|x|,r)} &\iff (1+|x|^2 - r^2)|z| - 2\langle z, e\rangle < 0 \\ &\iff (1+|e|^2 - r^2)|z| - 2\langle z, e\rangle < 0 \\ &\iff \left|\frac{z}{|z|} - e\right|^2 < r^2. \end{aligned}$$

Se inoltre $|z| \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)$, allora $z \in (B(_r(e)))_1^\epsilon$ e quindi $\frac{z}{|z|} \in B_r(e)$. Utilizzando quindi l'integrazione sferica (1.2) otteniamo:

$$\begin{aligned} \nu((B_r(x))_1^\epsilon) &= \int G(|z|, \langle z, e\rangle) dz \\ &= \int_0^\infty \int_{\partial B(0,\rho)} \chi_{B_r(e)}\left(\frac{y}{\rho}\right) \chi_{(1-\epsilon,1+\epsilon)}(\rho) d\mathcal{H}^{n-1}(y) d\rho \\ &= \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \mathcal{H}^{n-1}(\rho\partial B(0,1) \cap \rho B_r(e)) \\ &= \left(\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \rho^{n-1} d\rho\right) \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1) \cap B_r(e)) \\ &= \frac{(1+\epsilon)^n - (1-\epsilon)^n}{n} \mathcal{H}^{n-1}(B_r(e)). \end{aligned}$$

Sviluppando il binomio di Newton ricaviamo:

$$\begin{aligned} \nu((B_r(x))_1^\epsilon) &= \frac{1 + n\epsilon + o(\epsilon) - 1 + n\epsilon + o(\epsilon)}{n} \mathcal{H}^{n-1}(B_r(e)) \\ &= (2\epsilon + o(\epsilon)) \mathcal{H}^{n-1}(B_r(e)) \end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\nu((B_r(x))_1^\epsilon) = \mathcal{H}^{n-1}(B_r(e)). \tag{2.5}$$

Notiamo che $\mathcal{H}^{n-1}(B_r(e))$ non dipende dall'e scelto in $\partial B(0,1)$. Usando invece il Teorema 2.6 e nuovamente l'integrazione sferica (1.2):

$$\begin{aligned}
\nu((B_r(x))_1^\epsilon) &= \int G(|z|,\langle z,x\rangle)d\nu(z)\\
&= \int \chi_\Sigma(z)\chi_{B_r(x)}\left(\frac{z}{|z|}\right)\chi_{(1-\epsilon,1+\epsilon)}(|z|)d\mathcal{H}^n(z)\\
&= \int_0^\infty \int_{\partial B(0,\rho)\cap\Sigma}\chi_{B_r(x)}\left(\frac{y}{\rho}\right)\chi_{(1-\epsilon,1+\epsilon)}(\rho)d\mathcal{H}^{n-1}(y)d\rho\\
&= \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\mathcal{H}^{n-1}((\rho\partial B(0,1))\cap\Sigma\cap\rho B_r(x))\\
&= \left(\int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon}\rho^{n-1}d\rho\right)\mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1)\cap\Sigma\cap B_r(x))\\
&= (2\epsilon+o(\epsilon))\mathcal{H}^{n-1}(B_r(x)\cap\Omega).
\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\epsilon}\nu(B(_r(x))_1^\epsilon) = \mathcal{H}^{n-1}(B_r(x)\cap\Omega).$$

Combinando quest'ultima con la (2.5) si ottiene la tesi. Per un certo $e\in\partial B(0,1)$, per ogni $x\in\Omega$ infatti si ha:

$$\sigma(B(x,r)) = \mathcal{H}^{n-1}(B(x,r)\cap\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(B_r(x)\cap\Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(B_r(e)). \tag{2.6}$$

□

2.5 Misure coniche 3-uniformi

Nel caso particolare di una misura conica 3-uniforme si può dire qualcosa in più riguardo l'uniformità della componente sferica. Si scopre infatti che quest'ultima è "localmente" 2-uniforme.

Teorema 2.11 (Regolarità)**.** *Siano μ una misura in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ e $n\in\{1,2\}$. Se*

$$\frac{\mu(B(x,tr))}{\mu(B(x,r))} = t^n$$

per ogni $r\in(0,1]$, $t\in\left[\frac{1}{2},1\right]$, $x\in\Sigma$, allora Σ è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione n in $\mathbb{R}^d$.

Notiamo che si tratta di una generalizzazione del Teorema 2.4 per le misure n-uniformi nel caso particolare di $n = 1, 2$. Per l'enunciato abbiamo fatto riferimento a [8].

Teorema 2.12 (Uniformità)**.** *Siano ν una misura conica 3-uniforme in $\mathbb{R}^d$ e σ la sua componente sferica, con supporto Ω. Allora esiste una funzione $\phi : (0, \infty) \to (0, \infty)$ tale che per ogni $x \in \Omega$ e per ogni $r > 0$*

$$\sigma(B(x, r)) = \phi(r)$$

con

$$\phi(r) = \pi r^2 \chi_{(0,2)}(r) + 4\pi \chi_{[2,\infty)}(r).$$

Dimostrazione. L'esistenza di una tale ϕ è propria della della definizione di una misura uniformemente distribuita e quindi è la tesi del Teorema 2.10. Guardando poi all'eguaglianza (2.6) si nota che basta calcolare $\mathcal{H}^2(B_r(e))$ per un qualche $e \in \partial B(0, 1) \subset \mathbb{R}^3$.

Se $r \geq 2$ chiaramente $\partial B(0, 1) \subset B(e, r)$ e quindi $\mathcal{H}^2(B_r(e)) = \mathcal{H}^2(\partial B(0, 1)) = 4\pi$.

Altrimenti, fissiamo una qualsiasi base ortonormale di $\mathbb{R}^3$; possiamo prendere $e = (0, 0, 1)$. In tal caso:

$$\partial B_r(e) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 = 1,\, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = r^2\},$$

quindi la sfera $B(e, r)$ interseca il guscio sferico $\partial B(0, 1)$ in $z = 1 - \frac{r^2}{2}$.

Se $r = \sqrt{2}$, allora $B_r(e) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z \geq 0,\, x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e quindi $\mathcal{H}^2(B_r(e)) = 2\pi = \pi r^2$.

Se $r < \sqrt{2}$, allora $B_r(e)$ è parametrizzata da $\varphi : B\left(0, \sqrt{1 - \left(1 - \frac{r^2}{2}\right)^2}\right) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ della forma:

$$\varphi(x, y) = \left(x, y, f\left(x^2 + y^2\right)\right),$$

con $f(\rho) = \sqrt{1 - \rho}$. Si ha quindi:

$$\mathrm{Jac}(\varphi(x, y)) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{x}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} & -\frac{y}{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} \end{bmatrix}$$

e di conseguenza $\det(\mathrm{Jac}(\varphi(\xi))^t \mathrm{Jac}(\varphi(\xi))) = 1 + \frac{|\xi|^2}{1-|\xi|^2}$. Per il Teorema 1.6 (formula dell'area):

$$\mathcal{H}^2(B_r(e)) = \int \chi_{B\left(0, \sqrt{1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2}\right)}(\xi) \frac{1}{\sqrt{1 - |\xi|^2}} d\xi,$$

che usando l'integrazione sferica (1.2) dà:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}^2(B_r(e)) &= \int \chi_{\left(0,\sqrt{1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2}\right)}(|\xi|)\frac{1}{\sqrt{1-|\xi|^2}}d\xi \\
&= \int_0^{\sqrt{1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2}} \int_{\partial B(0,\rho)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\mathcal{H}^1(s)d\rho \\
&= 2\pi \int_0^{\sqrt{1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2}} \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}d\rho \\
&= -2\pi\left(\sqrt{1-\left(1-\left(1-\frac{r^2}{2}\right)^2\right)}-1\right) \\
&= \pi r^2.
\end{aligned}$$

Se $\sqrt{2} < r < 2$ la sfera $B(e,r)$ interseca il guscio sferico $\partial B(0,1)$ in $z = 1-\frac{r^2}{2} < 0$, quindi non è possibile applicare lo stesso tipo di calcoli. D'altro canto, $B := \partial B(0,1)\backslash B(e,r) = \partial B(0,1) \cap B(-e, \sqrt{4-r^2})$ e $\sqrt{4-r^2} < \sqrt{2}$. Possiamo allora applicare un ragionamento analogo al caso precedente per calcolare che $\mathcal{H}^2(B) = \pi(4-r^2)$ e quindi $\mathcal{H}^2(B_r(e)) = \mathcal{H}^2(\partial B(0,1)) - \mathcal{H}^2(B) = 4\pi - \pi(4-r^2) = \pi r^2$. $\square$

Dati $x \in \Omega$, $r \in (0,1]$ e $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, possiamo calcolare

$$\frac{\sigma(B(x,tr))}{\sigma(B(x,r))} = \frac{r^2t^2}{r^2} = t^2$$

e quindi per il Teorema 2.11 si ha come conseguenza il seguente teorema.

Teorema 2.13. *Sia ν una misura conica 3-uniforme in $\mathbb{R}^d$ e sia σ la sua componente sferica con supporto Ω. Allora Ω è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione 2 in $\mathbb{R}^d$.*

Teorema 2.14. *Sia ν una misura conica 3-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ. Allora $\Sigma\backslash\{0\}$ è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione 3 in $\mathbb{R}^d$.*

Dimostrazione. Dal momento che $c\Sigma = \Sigma$ per ogni $c > 0$, possiamo limitarci a mostrare che Σ è una sottovarietà in un intorno di un qualsiasi $x \in \Omega$ (ricordiamo che $\Omega = \Sigma \cap \partial B(0,1)$). Fissiamo $x_0 \in \Omega$; per il Teorema 2.14, Ω è una sottovarietà 2-dimensionale, quindi possiamo prendere $\{v_1, v_2\}$ una base ortonormale per $T_{x_0}\Omega$ ed un suo completamento $\{v_1, ..., v_d\}$ ad una base ortonormale di $\mathbb{R}^d$. Esistono un intorno U_0 di x_0, un aperto $G \subset \mathbb{R}^2$ ed una parametrizzazione $F : G \to \Omega \cap U_0$ della forma

$$F(x_1,x_2) = x_0 + x_1v_1 + x_2v_2 + F_3(x_1,x_2)v_3 + ...F_d(x_1,x_2)v_d.$$

Fissiamo $0 < \epsilon < 1$ e definiamo l'aperto $V = \{cx : x \in \partial B(0,1) \cap U_0, c \in (1-\epsilon, 1+\epsilon)\}$; allora V è un intorno di x_0 e

$$\begin{aligned} y \in \Sigma \cap V &\iff y = cx \text{ per } x \in \Omega,\ c \in (1-\epsilon, 1+\epsilon) \\ &\iff y = cF(x_1, x, 2) \text{ per } (x_1, x_2) \in G,\ c \in (1-\epsilon, 1+\epsilon). \end{aligned}$$

Ne consegue che $H : G \times (1-\epsilon, 1+\epsilon) \to \Sigma \cap V$ è un diffeomorfismo C^1. Abbiamo quindi dimostrato che ogni $x_0 \in \Omega$ ha un intorno in cui Σ è una varietà 3-dimensionale di classe C^1; di conseguenza lo è $\Sigma \backslash \{0\}$. $\square$

Capitolo 3

Teorema di Nimer

Dimostriamo in questo capitolo il seguente teorema:

Teorema 3.1 (Nimer)**.** *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$ con supporto Σ e $3 \le n \le d$. Allora Σ è la seguente unione disgiunta:*

$$\Sigma = \mathcal{R}_\mu \cup \mathcal{S}_\mu, \tag{3.1}$$

con $\mathcal{R}_\mu$ sottovarietà di classe C^1 e dimensione n in $\mathbb{R}^d$, e $\mathcal{S}_\mu$ insieme chiuso dei punti singolari che verifica:

$$\dim(\mathcal{S}_\mu) \le n - 3. \tag{3.2}$$

La novità di questo teorema non è tanto la decomposizione (3.1), nota già con il Teorema 2.4, quanto la limitazione per la dimensione dell'insieme dei punti singolari (3.2). I teoremi della prossima sezione servono infatti per dimostrare quest'ultima disuguaglianza.

3.0.1 Notazioni

Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$. Con $\mu_{x,r}$ indichiamo la misura

$$\mu_{x,r} = \frac{\omega_n}{\mu(B(x,r))} T_{x,r}[\mu];$$

Se $x \in \operatorname{supp}(\mu)$ e $r \downarrow 0$, sia ν la misura tangente alla quale $\mu_{x,r}$ converge debolmente (esiste ed è un multiplo di quella normalizzata per il Teorema 2.1). Per il Teorema 1.2:

$$\begin{aligned}
\nu(B(0,1)) &\le \liminf_{r\to 0} \mu_{x,r}(B(0,1)) \\
&= \liminf_{r\to 0} \frac{\omega_n}{cr^n} \mu(B(x,r)) \\
&= \omega_n
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\nu(\overline{B(0,1-\epsilon)}) &\geq \limsup_{r\to 0} \mu_{x,r}(\overline{B(0,1-\epsilon)}) \\
&\geq \limsup_{r\to 0} \mu_{x,r}(B(0,1-2\epsilon)) \\
&= \limsup_{r\to 0} \frac{\omega_n}{cr^n}\mu(B(x,r(1-2\epsilon))) \\
&= \omega_n(1-2\epsilon)^n.
\end{aligned}$$

Per $\epsilon \to 0$ si ha $\nu(B(0,1)) \geq \omega_n$, che con la disuguaglianza precedente porta proprio a $\nu(B(0,1)) = \omega_n$, che è la definizione di misura tangente normalizzata. Analogamente se $x \in \mathbb{R}^d$ e $r \to \infty$, la misura ν a cui tende $\mu_{x,r}$ è la misura tangente ad infinito normalizzata.

Notiamo inoltre che ciascuna $\mu_{x,r}$ è n-uniforme con costante ω_n; sia infatti $y \in \frac{\Sigma - x}{r}$, allora

$$\mu_{x,r}(B(y,R)) = \frac{\omega_n}{cr^n}\mu(B(ry+x,rR)) = \frac{\omega_n}{cr^n}c(rR)^n = \omega_n R^n,$$

dal momento che $ry + x \in \Sigma$.

3.1 Risultati preliminari

In questa sezione seguiamo da vicino l'articolo di Nimer [1]. Dimostriamo in particolare due teoremi. Il primo afferma che l'insieme dei punti singolari di una misura 3-uniforme è discreto. Il secondo riguarda nuovamente l'inseme dei punti singolari e afferma che nel caso generico di una misura n-uniforme è contenuto nell'insieme dei punti singolari della misura tangente.

Cominciamo con un teorema che mostra la relazione tra le due misure che si ottengono dilatando una misura con due sequenze differenti di raggi e traslandola lungo la stessa sequenza di punti. Ricordiamo che F è il funzionale introdotto dalla Definizione 2.4.

Teorema 3.2. *Siano μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{supp}(\mu)$, $\{\tau_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ e $\{\sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ successioni di numeri decrescenti a 0. Supponiamo inoltre che $\sigma_k < \tau_k$ per ogni k e che esistano due misure n-uniformi α e β, in particolare α conica, tali che*

$$\mu_{x_k,\tau_k} \rightharpoonup \alpha,\ \mu_{x_k,\sigma_k} \rightharpoonup \beta.$$

Allora

$$F(\alpha) < \epsilon_0 \Rightarrow F(\beta) < \epsilon_0,$$

dove ϵ_0 è il valore del Teorema (2.3).

Dimostrazione. Sia c la costante di μ e supponiamo per assurdo che sia $F(\alpha) < \epsilon_0$ e $F(\beta) \geq \epsilon_0$. Per continuità del Funzionale (2.2), esistono $0 < \kappa < \epsilon_0$ e $k_0 > 0$ tali che per $k > k_0$ si ha:

$$F(\mu_{x_k,\tau_k}) < \kappa < F(\mu_{x_k,\sigma_k}).$$

Dato $k > 0$, definiamo la funzione $f_k : (0, \infty) \to (0, \infty)$ come

$$f_k(r) = F(\mu_{x_k,r})$$

che risulta continua. Infatti se $r \to r_0$, allora $\mu_{x,r} \rightharpoonup \mu_{x,r_0}$ e per il Teorema 2.2, $F(\mu_{x,r}) \to F(\mu_{x,r_0})$. Poiché per ogni $k > k_0$ si ha $f_k(\tau_k) < \kappa < f_k(\sigma_k)$, esiste $\delta_k \in (\sigma_k, \tau_k)$ tale che

$$f_k(\delta_k) = \kappa \text{ e } f_k(r) \leq \kappa \text{ per ogni } r \in [\delta_k, \tau_k].$$

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ un compatto e sia $R > 0$ tale che $B(0, R) \supset K$. Allora per ogni k:

$$\begin{aligned} \mu_{x_k,\delta_k}(K) &\leq \mu_{x_k,\delta_k}(B(0, R)) \\ &= \frac{\omega_n}{cR^n}\mu(B(x_k, R)) \\ &= \omega_n, \end{aligned}$$

quindi per il Teorema 1.3 esiste una misura di Radon ξ a cui una sottosuccessione di $\{\mu_{x_k,\delta_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ converge debolmente. Per semplicità denotiamo la sottosuccessione usando gli stessi indici; vogliamo mostrare che ξ è n-uniforme. Fissiamo allora un $y \in \text{supp}(\xi)$ ed un $R > 0$; per il Teorema 2.5 esiste una successione $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $y_k \in \text{supp}(\mu_k)$ e $y_k \to y$, ossia per ogni $\epsilon > 0$ esiste k_1 tale che per $k > k_1$ si ha

$$|y - y_k| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Abbiamo potuto usare tale teorema perché ciascuna μ_{x_k,δ_k} è n-uniforme con costante ω_n. Usando il Teorema 1.2 otteniamo allora:

$$\begin{aligned} \xi(B(y, R)) &\leq \liminf \mu_{x_k,\delta_k}(B(y, R)) \\ &\leq \liminf \mu_{x_k,\delta_k}\left(B\left(y_k, R + \frac{\epsilon}{4}\right)\right) \\ &= \omega_n \left(R + \frac{\epsilon}{4}\right)^n. \end{aligned}$$

D'altra parte

$$
\begin{aligned}
\xi(B(y,R)) &\geq \xi\left(\overline{B\left(y, R-\frac{\epsilon}{8}\right)}\right)\\
&\geq \xi\left(B\left(y, R-\frac{\epsilon}{4}\right)\right)\\
&\geq \limsup \mu_{x_k,\delta_k}\left(B\left(y, R-\frac{\epsilon}{4}\right)\right)\\
&\geq \limsup \mu_{x_k,\delta_k}\left(B\left(y_k, R-\frac{\epsilon}{2}\right)\right)\\
&= \omega_n\left(R-\frac{\epsilon}{2}\right)^n.
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi ottenuto che per ogni $\epsilon > 0$

$$
\omega_n\left(R-\frac{\epsilon}{2}\right)^n \leq \xi(B(y,R)) \leq \omega_n\left(R+\frac{\epsilon}{4}\right)^n,
$$

di conseguenza per $\epsilon \to 0$ si ha proprio che $\xi(B(y,R)) = \omega_n R^n$, cioè ξ è una misura n-uniforme.

Per la continuità di F data dal Teorema 2.2, $F(\xi) = \kappa > 0$, quindi ξ non può essere piatta. Vogliamo ora mostrare che il funzionale F calcolato sulla tangente ad infinito di ξ è minore di ϵ_0 e quindi per il teorema 2.3 deve essere ξ piatta, contraddicendo quanto appena mostrato.

Mostriamo prima di tutto che:

$$
\frac{\tau_k}{\delta_k} \to \infty.
$$

Supponiamo per assurdo che $\beta_k := \frac{\tau_k}{\delta_k} \to C$, con $1 \leq C < \infty$ ($\tau_k > \delta_k$ per ogni k, quindi $\beta_k \geq 1$ per ogni k), possiamo scrivere:

$$
\mu_{x_k,\tau_k} = \left(\frac{\delta_k}{\tau_k}\right)^n \frac{\omega_n}{c\delta_k^n} T_{0,\frac{\tau_k}{\delta_k}}[T_{x_k,\delta_k}[\mu]] = \beta_k^{-n} T_{0,\beta_k}[\mu_{x_k,\delta_k}]
$$

e poichè $\mu_{x_k,\delta_k} \rightharpoonup \xi$, proviamo che $\beta_k^{-n} T_{0,\beta_k}[\mu_{x_k,\delta_k}] \rightharpoonup \xi_{0,C}$. Siano $R > 0$ e $f \in$

$\mathcal{L}(R)$, allora

$$
\begin{aligned}
&\left|\beta_k^{-n}\int f(y)dT_{0,\beta_k}[\mu_{x_k,\delta_k}](y)-\int f(y)d\xi_{0,C}(y)\right|\\
&=\left|\beta_k^{-n}\int f\left(\frac{y}{\beta_k}\right)d\mu_{x_k,\delta_k}(y)-C^{-n}\int f\left(\frac{y}{C}\right)d\xi\right|\\
&\leq \beta_k^{-n}\int\left|f\left(\frac{y}{\beta_k}\right)-f\left(\frac{y}{C}\right)\right|d\mu_{x_k,\delta_k}\\
&+|\beta_k^{-n}-C^{-n}|\int\left|f\left(\frac{y}{C}\right)\right|d\mu_{x_k,\delta_k}\\
&+C^{-n}\left|\int f\left(\frac{y}{C}\right)d\mu_{x_k,\delta_k}(y)-\int f\left(\frac{y}{C}\right)d\xi\right|\\
&\leq \beta_k|\beta_k^{-1}-C^{-1}|\omega_n(R+c_0)^{n+1}+|\beta_k^{-n}-C^{-n}|\omega_n(R+c_0)^n\\
&+C^{-n}\left|\int f\left(\frac{y}{C}\right)d\mu_{x_k,\delta_k}(y)-\int f\left(\frac{y}{C}\right)d\xi\right|
\end{aligned}
$$

definitivamente, per un'opportuna $c_0>0$. Poiché $C\geq 1$, $f\left(\frac{\cdot}{C}\right)\in\mathcal{L}(R)$ e quindi il tutto tende a 0 per $k\to\infty$, che dimostra esattamente la convergenza desiderata, grazie al Teorema 1.4. D'altro canto per ipotesi $\mu_{x_k,\tau_k}\rightharpoonup\alpha$, quindi per unicità $\alpha=\xi_{0,C}$ ed essendo $F(\alpha)<\epsilon_0$ e α conica, per il Teorema 2.3 deve essere α piatta, quindi $\xi_{0,C}$ piatta. Ne consegue che ξ è piatta, giungendo quindi ad una contraddizione. Deve essere allora $\beta_k\to\infty$.

Fissiamo ora $R>1$. Poiché $\beta_k\to\infty$, esiste $k_2>k_0$ tale che per ogni $k>k_2$:

$$R\delta_k\in[\delta_k,\tau_k] \text{ e } F(\mu_{x_k,R\delta_k})\leq\kappa;$$

ne consegue che :

$$\limsup_{k\to\infty}F(\mu_{x_k,R\delta_k})\leq\kappa. \tag{3.3}$$

Poiché $\mu_{x_k,R\delta_k}=T_{0,R}[\mu_{x_k,\delta_k}]$, per ogni $s>0$ e $f\in\mathcal{L}(s)$ si ha:

$$\left|\int f(y)d\mu_{x_k,R\delta_k}-\int f(y)d\xi_{0,R}\right|=R^{-n-1}\left|\int Rf\left(\frac{y}{R}\right)d\mu_{x_k,\delta_k}\int Rf\left(\frac{y}{R}\right)d\xi(y)\right|$$

e dal momento che $Rf\left(\frac{\cdot}{R}\right)\in\mathcal{L}(Rs)$ e che per ogni $g\in\mathcal{L}(Rs)$ si ha $R^{-1}g(\cdot R)\in\mathcal{L}(s)$, vale

$$F_s(\mu_{x_k,R\delta_k},\xi_{0,R})=R^{-n-1}F_{Rs}(\mu_{x_k,\delta_k},\xi)\to 0$$

per $k\to\infty$. Allora per la relazione (3.3) e per il Teorema 2.2 sulla continuità di F, per ogni $R>0$ si ha:

$$F(\xi_{0,R})\leq\kappa.$$

Facendo tendere $R\to\infty$, per il Teorema 2.1 abbiamo $\xi_{0,R}\to\nu$ misura tangente ad ∞ di ξ e quindi $F(\nu)\leq\kappa<\epsilon_0$, il che comporta che ξ è piatta per il Teorema 2.3, contraddicendo che $F(\xi)=\kappa>0$. □

Come conseguenza troviamo una proprietà dei punti singolari della misura tangente.

Teorema 3.3. *Sia μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$, $\bar{x} \in \operatorname{supp}(\mu)$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mu$, $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi decrescenti a 0. Supponiamo che sia $y_k := \frac{x_k - \bar{x}}{r_k} \in \overline{B(0,1)}$ e che $y_k \to y$. Allora:*

$$y \in \mathcal{S}_\nu$$

con ν la misura tangente normalizzata a μ in $\bar{x}$.

Dimostrazione. Senza perdere di generalità possiamo supporre $\bar{x} = 0$ e chiamiamo ν_k le tangenti normalizzate a μ in x_k. Vogliamo innanzitutto dimostrare che esiste una misura conica non piatta ν^∞ a cui converge debolmente una sottosuccessione di $\{\nu_k\}_k$.

Sia $K \subset \mathbb{R}^d$ compatto e sia $R > 0$ tale che $B(0,R) \supset K$; allora per ogni k:

$$\nu_k(K) \le \nu_k(B(0,R)) = \omega_n R^n$$

dal momento che ciascuna ν_k è una misura conica (quindi $0 \in \operatorname{supp}(\nu_k)$) ed n-uniforme. Per il Teorema 1.3 esiste allora una misura ν^∞ a cui tende debolmente una sottosuccessione delle ν_k e procedendo esattamente come visto nel teorema precedente otteniamo che ν^∞ è a sua volta n-uniforme. Siccome gli x_k sono punti non piatti, le ν_k sono misure coniche non piatte e quindi per il Teorema 2.3 deve essere $F(\nu_k) > \epsilon_0$ per ogni k, di conseguenza per continuità del funzionale F (Teorema 2.2), $F(\nu^\infty) \ge \epsilon_0$, quindi non può essere piatta (se lo fosse sarebbe $F(\nu^\infty) = 0$). Per semplicità nominiamo gli indici della sottosuccessione convergente a ν^∞ con $k \in \mathbb{N}$; siccome ciascuna ν_k è conica abbiamo in senso debole che:

$$\begin{aligned} T_{0,\nu}[\nu^\infty] &= \lim_{k\to\infty} T_{0,r}[\nu_k] \\ &= r^n \lim_{k\to\infty} \nu_k \\ &= r^n \nu^\infty. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi mostrato che ν^∞ è una misura conica n-uniforme non piatta.

Vogliamo ora mostrare che

$$y \in \operatorname{supp}(\nu) \text{ e } \mu_{x_k,r_k} \rightharpoonup \nu_y \tag{3.4}$$

dove $\nu_y := T_{y,1}[\nu]$. Fissiamo $\delta > 0$, per il Teorema 1.2

$$\begin{aligned}\nu(B(y,\delta)) &\geq \nu\left(\overline{B\left(y,\frac{\delta}{2}\right)}\right)\\ &\geq \nu\left(B\left(y,\frac{\delta}{4}\right)\right)\\ &\geq \limsup_{k\to\infty}\mu_{0,r_k}\left(B\left(y,\frac{\delta}{4}\right)\right)\\ &\geq \limsup_{k\to\infty}\frac{\omega_n}{\mu(B(0,r_k))}\mu\left(B\left(r_k y, r_k\frac{\delta}{4}\right)\right).\end{aligned}$$

Per k sufficientemente grandi $|y-y_k| \leq \frac{\delta}{8}$, quindi $B\left(r_k y_k, r_k\frac{\delta}{8}\right) \subset B\left(r_k y, r_k\frac{\delta}{4}\right)$. Inoltre $r_k y_k = x_k$, di conseguenza:

$$\begin{aligned}\nu(B(y,\delta)) &\geq \limsup_{k\to\infty}\frac{\omega_n}{\mu(B(0,r_k))}\mu\left(B\left(x_k, r_k\frac{\delta}{8}\right)\right)\\ &= \omega_n\left(\frac{\delta}{8}\right)^n > 0.\end{aligned}$$

Ciò dimostra che $y \in \mathrm{supp}(\nu)$. Passiamo ora alla dimostrazione della convergenza debole. Fissiamo $R > 0$ e prendiamo una generica $\phi \in \mathcal{L}(R)$. Dal momento che $\frac{y_k}{r_k} \to 0$ e $r_k \downarrow 0$, deve essere $|y_k| \to 0$, in particolare per k sufficientemente grandi $|y_k| \leq 2$. Allora definitivamente :

$$\begin{aligned}&\left|\int \phi(z)d\mu_{x_k,r_k}(z) - \int \phi(z)dT_{y_k,1}[\nu](z)\right|\\ &= \left|\int \phi\left(\frac{z-x_k}{r_k}\right)\frac{\omega_n}{cr_k^n}d\mu(z) - \int \phi(z-y_k)d\nu(z)\right|\\ &= \left|\int \phi\left(\frac{z}{r_k}-y_k\right)\frac{\omega_n}{cr_k^n}d\mu(z) - \int \phi(z-y_k)d\nu(z)\right|\\ &= \left|\int \phi\left(z-y_k\right)d\mu_{0,r_k}(z) - \int \phi(z-y_k)d\nu(z)\right|\\ &\leq F_{R+2}(\mu_{0,r_k},\nu),\end{aligned}$$

poiché per k sufficientemente grandi $\phi(\cdot - y_k) \in \mathcal{L}(R+2)$. D'altra parte

$$\begin{aligned}\left|\int \phi(z)dT_{y_k,1}[\nu](z) - \int \phi(z)dT_{y,1}[\nu]\right| &= \int |\phi(z-y_k)-\phi(z-y)|d\nu(z)\\ &\leq |y-y_j|\nu(B(0,R+2)).\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore sulle $\phi \in \mathcal{L}(R)$:

$$F_R(\mu_{x_k,r_k},\nu_y) \leq F_{R+2}(\mu_{0,r_k},\nu) + |y-y_j|\nu(B(0,R+2)) \to 0$$

per $k \to \infty$. Per la generalità di R e per il Teorema 1.4 abbiamo quindi dimostrato la convergenza in (3.4).

Fissiamo nuovamente un generico $R > 0$. Per il Teorema 2.1, per ogni k abbiamo:

$$F_R(\mu_{x_k,\frac{1}{j}}, \nu_k) \to 0 \text{ per } j \to \infty.$$

Possiamo allora costruire una successione crescente $\{j_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tale che per ogni k valga:

$$\frac{1}{j_k} < r_k^2 \text{ e } F_R(\mu_{x_k,\frac{1}{j_k}}, \nu_k) < \frac{1}{k}.$$

Di conseguenza:

$$F_R(\mu_{x_k,\frac{1}{j_k}}, \nu^\infty) \le F_R(\mu_{x_k,\frac{1}{j_k}}, \nu_k) + F_R(\nu_k, \nu^\infty) \to 0.$$

Poniamo $\rho_k = \frac{1}{j_k r_k}$ e sia α la tangente normalizzata di ν_y in 0. Dal momento che $\frac{1}{j_k r_k} < r_k \to 0$ abbiamo:

$$(\nu_y)_{0,\rho_k} \rightharpoonup \alpha.$$

Equivalentemente α è la tangente normalizzata di ν in y. Infatti $\nu_y = T_{y,1}[\nu]$ e $T_{0,\rho_k} \circ T_{y,1} = T_{y,\rho_j}$, di conseguenza:

$$(\nu_y)_{0,\rho_k} = \rho_k^{-n} T_{0,\rho_k}[\nu_y] = \rho_k^{-n} T_{0,\rho_k}[T_{y,1}[\nu]] = \rho_k^{-n} T_{y,\rho_k}[\nu] = \nu_{y,\rho_k}.$$

Per l'affermazione (3.4) possiamo prendere una sottosuccessione $\{x_{l_k}\}_k$ di $\{x_k\}_k$ in modo che $l_k > k$, $l_k > l_{k-1}$ e valga:

$$F_1(\mu_{x_{l_k},r_{l_k}}) < \frac{1}{k}\rho_k^{n+1} \text{ e } \rho_{l_k} < \rho_k,$$

ciò è possibile perché $\rho_k \to 0$. Sia $\tau_k = r_{l_k}\rho_k$, allora:

$$\begin{aligned}
F_R(\mu_{x_{l_k},\tau_k}, (\nu_y)_{0,\rho_k}) &= F_R(\mu_{x_{l_k},\tau_k}, \rho_k^{-n} T_{0,\rho_k}[\nu_y]) \\
&= F_R(\rho_k^{-n} T_{0,\rho_k}[\mu_{x_{l_k},r_{l_k}}], \rho_k^{-n} T_{0,\rho_k}[\nu_y]) \\
&= \rho_k^{-n-1} F_{R\rho_k}(\mu_{x_{l_k},r_{l_k}}, \nu_y) \\
&\le \rho_k^{-n-1} F_1(\mu_{x_{l_k},r_{l_k}}, \nu_y) \\
&< \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

per k sufficientemente grandi infatti $\rho_k R < 1$. Ma allora:

$$F_R(\mu_{x_{l_k},\tau_k}, \alpha) \le F_R(\mu_{x_{l_k},\tau_k}, (\nu_y)_{0,\rho_k}) + F_R((\nu_y)_{0,\rho_k}, \alpha) \to 0$$

quindi, per la generalità di R, abbiamo dimostrato che:

$$\mu_{x_{l_k},\frac{1}{j_{l_k}}} \rightharpoonup \nu^\infty \text{ e } \mu_{x_{l_k},\tau_k} \rightharpoonup \alpha$$

con $\tau_k = r_{l_k}\rho_k > r_{l_k}\rho_{l_k} = \frac{r_{l_k}}{r_{l_k}}\frac{1}{j_{l_k}} = \frac{1}{j_{l_k}}$. Se α fosse piatta allora per il Teorema 3.2 sarebbe $F(\alpha) = 0 < \epsilon_0 \Rightarrow F(\nu^\infty) < \epsilon_0$, contrariamente a quanto mostrato. Quindi α non è piatta e di conseguenza $y \in \mathcal{S}_\nu$. $\square$

Discendono da questo teorema i due risultati nominati all'inizio di questa sezione. Il primo lo utilizziamo per passare dallo studio della dimensione dell'insieme singolare di una misura n-uniforme allo studio dell'insieme singolare di una sua misura tangente. Il secondo costituisce invece la base induttiva della dimostrazione del Teorema 3.1.

Teorema 3.4. *Siano μ una misura n-uniforme in $\mathbb{R}^d$, $x_0 \in \operatorname{supp}(\mu)$, ν la tangente normalizzata di μ in x_0 e $\{r_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri positivi decrescenti a 0. Allora per ogni $\epsilon > 0$ esiste un N tale che per ogni $k \geq N$*

$$\frac{\mathcal{S}_\mu - x_0}{r_k} \cap \overline{B(0,1)} \subset (\mathcal{S}_\nu)_\epsilon,$$

con $(\mathcal{S}_\nu)_\epsilon = \{y \in \mathbb{R}^d \,:\, \operatorname{dist}(y, \mathcal{S}_\nu) < \epsilon\}$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che non valga la tesi. Allora a meno di passare ad una sottosuccessione:

$$\frac{\mathcal{S}_\mu - x_0}{r_k} \cap \overline{B(0,1)} \cap \left(\mathbb{R}^d \setminus (\mathcal{S}_\nu)_\epsilon\right) \neq \emptyset.$$

Di conseguenza esiste una successione di punti $x_k \in \mathcal{S}_\mu$ tali che $y_k := \frac{x_k - x_0}{r_k} \in \overline{B(0,1)}$, $\operatorname{dist}(y_k, \mathcal{S}_\nu) \geq \epsilon$ e $y_k \to y$ per un qualche $y \in \overline{B(0,1)}$. Ma allora $\operatorname{dist}(y, \mathcal{S}_\nu) \geq \epsilon$, contrariamente a quanto si ottiene applicando il Teorema 3.3. □

Teorema 3.5. *Sia μ una misura 3-uniforme in $\mathbb{R}^d$. Allora l'insieme singolare di μ è discreto. Ossia, per ogni $K \subset \mathbb{R}^d$ compatto, $|\mathcal{S}_\mu \cap K| < \infty$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un compatto $K \subset \mathbb{R}^d$ tale che $|\mathcal{S}_\mu \cap K| = \infty$. Per la compattezza di K esiste allora una successione di punti $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{S}_\mu \cap K$ che converge ad un qualche punto $x_\infty \in K$. Inoltre, poiché il supporto di una misura chiusa è chiuso, $x_\infty \in \operatorname{supp}(\mu)$. Siano $r_k = |x_j - x_\infty|$ e $y_k = \frac{x_k - x_\infty}{r_k}$. Per il Teorema 2.1:

$$\mu_{x_\infty, r_k} \rightharpoonup \nu,$$

con ν la misura tangente normalizzata di μ a x_∞; d'altro canto le y_k stanno in $\partial B(0,1)$ quindi, a meno di passare ad una sottosuccessione, esiste $y \in \partial B(0,1)$ tale che $y_k \to y$. Per il Teorema 3.3 allora $y \in \mathcal{S}_\nu$; d'altro canto $\mathcal{S}_\nu \subset \operatorname{supp}(\nu)$ e $y \neq 0$, quindi per il Teorema 2.14 y è contenuto in una varietà e quindi per i Teoremi 2.4 e 2.7 non può essere un punto singolare. □

3.2 Dimostrazione del teorema di Nimer

Dimostriamo il Teorema 3.1. L'idea è di ricondursi alle misure tangenti; la misura tangente ad una misura n-uniforme infatti è conica e quindi può essere scomposta in due parti, una delle quali è $(n-1)$-uniforme. Dal momento che abbiamo un teorema che limita la dimensione dell'insieme singolare di una misura 3-uniforme e che possiamo ricondurci a studiare una misura $(n-1)$-uniforme partendo da una n-uniforme, la strategia per la dimostrazione è di tipo induttivo.

3.2.1 Base induttiva della dimostrazione di Nimer

Sia μ una misura 3-uniforme in $\mathbb{R}^d$. Il Teorema 3.5 afferma che il suo insieme singolare è discreto. Ciò significa che $\dim(\mathcal{S}_\mu) = 0 = 3-3$, di conseguenza rispetta la tesi del Teorema 3.1.

Supponiamo ora di avere una misura μ m-uniforme in $\mathbb{R}^d$ e supponiamo che il Teorema 3.1 sia valido per tutte le misure n-uniformi con $n < m$. Sia $s > 0$ tale che $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\mu) > 0$; vogliamo dimostrare che $s \leq m-3$.

3.2.2 Passaggio al tangente di μ

Vogliamo provare che esiste un punto singolare x_0 nel supporto di μ tale che:

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\nu \cap \overline{B(0,1)}) > 0, \tag{3.5}$$

dove ν è la tangente normalizzata a μ in x_0. Per quanto visto sulle misure di Hausdorff, $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\mu) > 0 \Leftrightarrow \mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}_\mu) > 0$; esiste quindi un compatto K per il quale $\mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}_\mu \cap K) > 0$.

Abbiamo ora bisogno del seguente teorema. Lo si trovare in [10], Teorema 3.6 (2).

Teorema 3.6. *Sia $J \subset \mathbb{R}^d$ un insieme compatto. Allora $\theta^{*,s}(\mathcal{H}^s_\infty \llcorner J, z) \geq 2^{-s}$ per $\mathcal{H}^s$ quasi ogni $z \in J$.*

Ne consegue che per $\mathcal{H}^s$ quasi ogni $z \in \mathcal{S}_\mu \cap K =: \mathcal{S}_\mu^K$ vale:

$$\theta^{*,s}(\mathcal{H}^s_\infty \llcorner \mathcal{S}_\mu^K, z) \geq 2^{-s};$$

come x_0 prendiamo un punto per il quale questa relazione è valida. Abbiamo allora che:

$$\begin{aligned}
\limsup_{r\to 0} \mathcal{H}^s_\infty\left(\overline{B(0,1)} \cap \frac{\mathcal{S}_\mu^K - x_0}{r}\right) &> \limsup_{r\to 0} \mathcal{H}^s_\infty\left(\overline{B(0,1)} \cap \frac{\mathcal{S}_\mu^K - x_0}{r}\right)\frac{1}{\omega_s} \\
&= \limsup_{r\to 0} \mathcal{H}^s_\infty\left(\overline{B(0,r)} \cap (\mathcal{S}_\mu^K - x_0)\right)\frac{1}{r^s\omega_s} \\
&= \limsup_{r\to 0} \mathcal{H}^s_\infty\left((\overline{B(x_0,r)} \cap \mathcal{S}_\mu^K) - x_0\right)\frac{1}{r^s\omega_s} \\
&= \limsup_{r\to 0} \mathcal{H}^s_\infty\left((\overline{B(x_0,r)} \cap \mathcal{S}_\mu^K)\right)\frac{1}{r^s\omega_s} \\
&= \theta^{*,s}(\mathcal{H}^s_\infty \llcorner \mathcal{S}_\mu^K, z) \geq 2^{-s};
\end{aligned}$$

quindi esiste una successione $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ di raggi decrescenti a 0 tale che:

$$\limsup_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_\infty\left(\overline{B(0,1)} \cap \frac{\mathcal{S}^K_\mu - x_0}{r_j}\right) \geq 2^{-s}.$$

Per il Teorema 2.1, $\mu_{x_0,r_j} \rightharpoonup \nu$; allora per il Teorema 3.4 per ogni $\epsilon > 0$ esiste un $j_0 > 0$ tale che per ogni $j \geq j_0$ abbiamo:

$$\frac{\mathcal{S}^K_\mu - x_0}{r_j} \cap \overline{B(0,1)} \subset (\mathcal{S}_\nu)_\epsilon. \tag{3.6}$$

Fissiamo $\delta > 0$ e consideriamo $\{E_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto di $\mathcal{S}_\nu \cap \overline{B(0,1)} =: \mathcal{S}^B_\nu$ tale che

$$\mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}^B_\nu) > \omega_s 2^{-s} \sum_{l=1}^{\infty} (\mathrm{diam}(E_l))^s - \delta.$$

Poiché $\mathcal{S}^B_\nu$ è compatto, esiste un numero finito di E_l, $l = 1, ..., L$, che ricopre $\mathcal{S}^B_\nu$. Siano allora $E = \bigcup_{l=1}^L E_k$ ed $\epsilon = \min\{\mathrm{diam}(E_l) \,:\, l = 1, ..., L\}$, abbiamo:

$$(\mathcal{S}^B_\nu)_\epsilon \subset E.$$

Per la relazione (3.6), per ogni $j \geq j_0$ abbiamo che:

$$\frac{\mathcal{S}^K_\mu - x_0}{r_j} \cap \overline{B(0,1)} \subset E$$

e di conseguenza

$$\mathcal{H}^s_\infty\left(\frac{\mathcal{S}^K_\mu - x_0}{r_j} \cap \overline{B(0,1)}\right) \leq \omega_s 2^{-s} \sum_{l=1}^{L} (\mathrm{diam}(E_l))^s \leq \mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}^B_\nu) + \delta.$$

Facendo il limite superiore otteniamo:

$$\delta + \mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}^B_\nu) \geq \limsup_{j\to\infty} \mathcal{H}^s_\infty\left(\frac{\mathcal{S}^K_\mu - x_0}{r_j} \cap \overline{B(0,1)}\right) \geq 2^{-s}$$

e infine per l'arbitrarietà di δ otteniamo che

$$\mathcal{H}^s_\infty(\mathcal{S}^B_\nu) \geq 2^{-s}$$

dimostrando così la relazione (3.5).

Ripetendo esattamente lo stesso argomento, troviamo che esiste $\xi \in \mathcal{S}_\nu \cap \overline{B(0,1)}$ tale che:

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\lambda \cap \overline{B(0,1)}) > 0,$$

con λ la misura tangente normalizzata di ν in ξ. Dal momento che ν è m-uniforme e ξ è singolare, λ è una misura conica m-uniforme non piatta il cui supporto verrà indicato con Σ.

3.2.3 Scomposizione di Σ

Vogliamo ora dimostrare che $\Sigma = \mathbb{R}e_1 \oplus A$, per un opportuno $e_1 \in \mathbb{R}^d$ ed A l'intersezione del supporto Σ con un $m-1$-piano. Per farlo però abbiamo prima bisogno di dimostrare che

$$T_{t\xi,1}[\lambda] = \lambda \tag{3.7}$$

per ogni $t > 0$, dove ξ è il punto singolare di ν in prendiamo la misura tangente λ. Fissiamo allora un $t > 0$ e sia $\{s_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una qualsiasi successione di raggi decrescenti a 0. Per $U \subset \mathbb{R}^d$ vale:

$$\left(\frac{s_j}{1+t}U + \xi\right)(1+t) = s_jU + \xi(1+t),$$

quindi, poiché ν è conica:

$$\begin{aligned}\nu_{(1+t)\xi,s_j} &= s_j^{-m}T_{\xi,\frac{s_j}{1+t}}[T_{0,1+t}[\nu]]\\ &= s_j^{-m}(1+t)^mT_{\xi,\frac{s_j}{1+t}}[\nu] \rightharpoonup \lambda\end{aligned}$$

dal momento che $\frac{s_j}{1+t} \to 0$ per $j \to \infty$ e con dei passaggi analoghi a quelli visti nel Teorema 3.6 si vede che la misura tangente a cui tende è proprio quella normalizzata.

D'altro canto per $U \subset \mathbb{R}^d$:

$$s_jU + (1+t)\xi = (U + t\xi)s_j + (1 + (1-s_j)t)\xi$$

e di conseguenza $T_{(1+t)\xi,s_j}[\nu] = T_{t\xi,1}[T_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu]]$. Vogliamo mostrare che $s_j^{-m}T_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu] \rightharpoonup \lambda$. Prendiamo $R > 0$ e $\phi \in \mathcal{L}(R)$; allora per j sufficientemente grandi $|1-s_j| \le 2$ e quindi:

$$\begin{aligned}&s_j^{-m}\left|\int \phi(z)dT_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu](z) - \int \phi(z)dT_{(1+t)\xi,s_j}[\nu](z)\right|\\ &= s_j^{-m}\left|\int_{B(0,R+(1+2|t|)|\xi|)}(\phi(z-(1+(1-s_j)t)\xi) - \phi(z-(1+t)\xi))dT_{0,s_j}[\nu](z)\right|\\ &\le \int_{B(0,R+(1+2|t|)|\xi|)}|s_j\xi t|dT_{0,s_j}[\nu](z)\\ &= s_j^{-m}s_jt|\xi|\omega_ms_j^m(R+(1+2|t|)|\xi|)^m.\end{aligned}$$

Prendendo l'estremo superiore su $\phi \in \mathcal{L}(R)$ otteniamo:

$$\begin{aligned}A_j &:= F_R(s_j^{-m}T_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu], s_j^{-m}T_{(1+t)\xi,s_j}[\nu])\\ &\le s_jt|\xi|\omega_m(R+(1+2|t|)|\xi|)^m \to 0\end{aligned}$$

per $j \to \infty$, dal momento che $s_j \to 0$. Di conseguenza:

$$F_R(s_j^{-m}T_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu], \lambda) \le A_j + F_R(s_j^{-m}T_{(1+t)\xi,s_j}[\nu], \lambda) \to 0$$

per $j \to \infty$. Sappiamo quindi che:

$$T_{t\xi,1}[T_{(1+(1-s_j)t)\xi,s_j}[\nu]] = T_{(1+t)\xi,s_j}[\nu]$$

e quindi, facendo il limite debole per $j \to \infty$ otteniamo la (3.7).

Da questa uguaglianza segue che per $t > 0$ $\Sigma - t\xi = \Sigma$. Aggiungendo $t\xi$ a entrambi i membri otteniamo $\Sigma = \Sigma + t\xi$ e quindi:

$$\Sigma = \Sigma + t\xi$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Poniamo allora $e_1 = \frac{\xi}{|\xi|}$ e $A = \{x \in \Sigma : \langle x, e_1 \rangle = 0\}$. Allora:

$$\Sigma = \mathbb{R}e_1 \oplus A. \tag{3.8}$$

Infatti da una parte, se $z \in \mathbb{R}e_1 \oplus A$, allora esistono $z' \in A$ e $t \in \mathbb{R}$ tali che $z = z' + te_1 = z' + \frac{t}{|\xi|}\xi$ e di conseguenza $z \in \Sigma$. Dall'altra, se $z \in \Sigma$ possiamo scrivere

$$z = (z - \langle z, e_1 \rangle e_1) + \langle z, e_1 \rangle e_1$$

che comporta $z \in \mathbb{R}e_1 \oplus A$.

3.2.4 Passo induttivo della dimostrazione di Nimer

Per la scomposizione (3.8) e per il Teorema 2.6 la misura λ è della forma $\lambda = c\omega_m^{-1}\mathcal{H}^m \llcorner (\mathbb{R}e_1 \oplus A)$, per una qualche $c > 0$.

Teorema 3.7. *Sia M una sottovarietà m-dimensionale di classe C^1 di $\mathbb{R}^s$, $m < s$. Allora sono equivalenti:*

1. $\mathcal{H}^m(B(x,r) \cap M) = \alpha r^m$
   per ogni $x \in M$, $r > 0$, $B(x,r) \subset \mathbb{R}^s$, per una fissata costante α;
2. $\mathcal{H}^{m+1}(B(x,r) \cap (M \times \mathbb{R})) = \alpha r^{m+1}$
   per ogni $x \in M \times \mathbb{R}$, $r > 0$, $B(x,r) \subset \mathbb{R}^{s+1}$.

Per l'enunciato abbiamo fatto riferimento al Teorema 3.11 di Kowalski e Preiss in [11]. Di conseguenza:

$$\lambda_0 := \mathcal{H}^{m-1} \llcorner A$$

è una misura $(m-1)$-uniforme in $\{z \in \mathbb{R}^d : \langle z, e_1 \rangle = 0\} \cong \mathbb{R}^{d-1}$. Vogliamo provare che:

$$S_\lambda \subset \mathbb{R}e_1 \oplus \mathcal{S}_{\lambda_0}. \tag{3.9}$$

Per come lo abbiamo definito, possiamo considerare $A \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Iniziamo mostrando che se $y \in A$ è un punto piatto di λ_0, per ogni $t \in \mathbb{R}$ il punto $y + te_1$ è piatto per λ. Per i Teoremi 2.7 e 2.4 esiste un intorno U' di y in $\mathbb{R}^{d-1}$ tale che $A \cap U'$ è una sottovarietà di $\mathbb{R}^{d-1}$ di classe C^1 e dimensione $m - 1$. Presa

$\{e_2, ..., e_m\}$ una base ortonormale per $T_y(A \cap U')$, la si può estendere a $\{e_2, .., e_d\}$ base ortonormale per $\mathbb{R}^{d-1}$; esistono un aperto $G \subset \mathbb{R}^{m-1}$ contenente lo 0 ed una parametrizzazione $\psi : G \to A \cap U'$ della forma $\psi(z) = y + (z, \psi_{m+1}(z), ..., \psi_d(z))$ e quindi:

$$U' \cap A = \left\{ z_2 e_2 + ... + z_m e_m + \sum_{k=m+1}^{d} \psi_k(z_2, .., z_m) e_k \, : \, (z_1, .., z_d) \in G \right\}. \quad (3.10)$$

Ma allora Σ è una sottovarietà di classe C^1 e dimensione m nell'intorno $U = \{se_1 + z' \, : \, (s, z') \in (t-1, t+1) \times U'\}$ per un qualsiasi $t \in \mathbb{R}$ fissato. Grazie alla (3.9) e alla (3.10), $z \in \Sigma \cap U$ può essere scritto come:

$$z = z_1 e_1 + ... + z_m e_m + \sum_{k=m+1}^{d} \psi_k(z_2, .., z_m) e_k$$

con $(z_2, .., z_m) \in G$ e $z_1 \in (t-1, t+1)$. Essendo che $\{e_1, ..., e_d\}$ costituisce una base ortonormale di $\mathbb{R}^d$ per definizione, la funzione $\Psi : (t-1, t+1) \times G \to \Sigma \cap U$, $\Psi(z_1, .., z_m) = (z_1, \psi(z_2, .., z_m))$ è una parametrizzazione per $\Sigma \cap U$.

Prendiamo allora $x \in \mathcal{S}_\lambda$. In particolare $x \in \Sigma$ e quindi $x = te_1 + y$ per un qualche $t \in \mathbb{R}$. Per quanto appena mostrato, se y fosse un punto piatto di λ_0 allora dovrebbe esserlo anche x, di conseguenza $y \in \mathcal{S}_{\lambda_0}$. Abbiamo quindi dimostrato la (3.9) e poiché $\mathbb{R}e_1 \oplus \mathcal{S}_{\lambda_0} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{S}_{\lambda_0}$ abbiamo:

$$\dim(\mathcal{S}_\lambda) \leq \dim(\mathcal{S}_{\lambda_0}) + 1.$$

Poiché $\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\lambda) > 0$ allora $\dim(\mathcal{S}_\lambda) \geq s$. Per il passo induttivo, siccome λ_0 è $(m-1)$-uniforme, $\dim(\mathcal{S}_{\lambda_0}) \leq (m-1) - 3$, quindi abbiamo dimostrato che:

$$\mathcal{H}^s(\mathcal{S}_\mu) > 0 \Rightarrow s \leq m - 3$$

e di conseguenza

$$\dim(\mathcal{S}_\mu) \leq m - 3.$$

Capitolo 4

Esempi

La misura di Lebesgue $\mathcal{L}$ in $\mathbb{R}^d$ è d-uniforme con supporto $\Sigma = \mathbb{R}^d$. Infatti

$$\mathcal{L}(B(x,r)) = \omega_d r^d.$$

Dato poi V un n-piano di $\mathbb{R}^d$, la misura di Hausdorff ristretta a V è n-uniforme con supporto $\Sigma = V$. Poiché la misura di Hausdroff di un insieme è invariante per traslazioni e rotazioni, dati $x \in V$ e $r > 0$ si ha

$$\mathcal{H}^n(V \cap B^d(x,r)) = \mathcal{H}^n(\{(y_1, ..., y_d) \in B^d(0,r) \, : \, y_{n+1} = ... = y_d = 0\})$$

dove l'apice d sulla palla lo usiamo per indicare che è una palla di $\mathbb{R}^d$. Quindi per la formula dell'area (Teorema 1.6):

$$\mathcal{H}^{d-1}(\{(y_1, ..., y_d) \in B^d(0,r) \, : \, y_{n+1} = ... = y_d = 0\}) = \int_{B^n(0,r)} dz = \omega_n r^n.$$

Esclusi questi casi più semplici, esistono pochi altri esempi di misure n-uniformi. Qui ne studiamo altri due, il guscio sferico in $\mathbb{R}^3$ ed il cono di Kowalski-Preiss.

4.1 Guscio sferico in $\mathbb{R}^3$

Sia $B(x_0, R)$ una palla di $\mathbb{R}^3$ con $x_0 \in \mathbb{R}^3$ e $R > 0$. Dato $x \in \Sigma := \partial B(x, R)$ e $r \in (0, 2R)$ allora:

$$\mathcal{H}^2 \llcorner \Sigma(B(x,r)) = \pi r^2.$$

Questa relazione la si è vista nella dimostrazione del Teorema 2.12, che riguarda il calcolo esplicito della funzione di distribuzione della componente sferica. Dal momento che deve essere $r < 2R$, $\mathcal{H}^2 \llcorner \Sigma$ non è una misura 2-uniforme, ma viene utilizzata da Nimer [12] per costruire nuovi esempi di misure 3-uniformi.

4.2 Cono di Kowalski-Preiss

Posto

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^4 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2\},$$

vogliamo dimostrare che $\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma$ è una misura 3-uniforme. Seguiamo la strategia di De Lellis [7], che riprende il lavoro di Kowalski-Preiss [11] in cui si raggiunge il seguente risultato più generale.

Teorema 4.1. *Sia μ in $\mathbb{R}^d$. μ è una misura $(d-1)$-uniforme se e solo se è una misura piatta oppure $d \geq 4$ ed esiste un sistema di coordinate ortonormali per il quale $\mu = \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2\}$.*

Posto $\mathcal{P}$ l'insieme di tutti i polinomi in una variabile reale, definiamo $\mathcal{R}_n$ come lo spazio vettoriale generato da

$$\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \,:\, f(x) = P(|x|^2)e^{-b|x|^2}, P \in \mathcal{P}, b > 0\}.$$

Per ogni $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$, posta $G \in C_c(\mathbb{R}^n)$ come $G(x) := g(|x|)$, esiste una successione di $\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_n$ tale che $G_k \to G$ uniformemente. Fissato infatti $N \in \mathbb{N}$ si ha

1. per ogni $a, b \in [0, N]$ esiste una funzione $f \in \mathcal{R}_1$ tale che $f(a) \neq f(b)$;

2. per ogni $a \in [0, N]$ esiste una funzione $f \in \mathcal{R}_1$ tale che $f(a) \neq 0$.

Il Teorema di Stone-Weierstrass permette allora di concludere che $\mathcal{R}_1$ è denso in $C([0, N])$ per ogni $N > 0$, di conseguenza è denso in $C_c([0, \infty))$. Otteniamo quanto volevamo mostrare notando infine che $G \in \mathcal{R}_n$ se e solo se $G(x) = g(|x|)$ per una qualche $g \in \mathcal{R}_1$. Dimostriamo ora l'uniformità della misura di Hausdorff ristretta al cono Γ.

Passo 1. Dato $p \in \Gamma\backslash\{0\}$, mostriamo che:

$$I(r) := \int e^{-r^2|x-p|^2} d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma = cr^{-3} \tag{4.1}$$

per un'opportuna costante $c > 0$ e per ogni $r > 0$.

Γ è invariante per rotazioni che lasciano fisso $(1, 0, 0, 0)$ e per dilatazioni centrate all'origine, quindi è sufficiente dimostrare (4.1) per $p = (1, 0, 0, 1)$. Dal momento che $\frac{x}{|x|} \in T_x\Gamma$, possiamo applicare la formula di coarea (Teorema 1.7) prendendo una base ortonormale dello spazio tangente in x che includa $\frac{x}{|x|}$. Utilizziamo allora la formula con $f(x) = |x|$ e otteniamo:

$$I(r) = \int_0^\infty \int_{\Gamma\cap\partial B(0,\rho)} e^{-r^2[(x_1-1)^2+x_2^2+x_3^2+(x_4-1)^2]} d\mathcal{H}^2(x) d\rho =: \int_0^\infty J(\rho) d\rho.$$

Notiamo che

$$(x_1-1)^2+x_2+x_3+(x_4-1)^2=|x|^2+2-2(x_1+x_4),$$

quindi

$$\begin{aligned}\Gamma\cap\partial B(0,\rho)&=\{x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_4^2,\, x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=\rho^2\}\\&=\left\{x_4=\frac{\rho}{\sqrt{2}},\, x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{\rho^2}{2}\right\}\\&\cup\left\{x_4=-\frac{\rho}{\sqrt{2}},\, x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{\rho^2}{2}\right\}.\end{aligned}$$

Possiamo allora calcolare:

$$\begin{aligned}J(\rho)&=e^{-r^2(\rho^2+2)}e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\int_{\{x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{\rho^2}{2},x_4=\frac{\rho}{\sqrt{2}}\}}e^{2r^2x_1}d\mathcal{H}^2(x)\\&+e^{-r^2(\rho^2+2)}e^{\sqrt{2}r^2\rho}\int_{\{x_1^2+x_2^2+x_3^2=\frac{\rho^2}{2},x_4=-\frac{\rho}{\sqrt{2}}\}}e^{2r^2x_1}d\mathcal{H}^2(x)\\&=:e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{-\sqrt{2}r^2\rho}K_1(\rho)+e^{\sqrt{2}r^2\rho}K_2(\rho)\right).\end{aligned}$$

Calcoliamo $K_1(\rho)$ utilizzando le coordinate sferiche

$$(\theta,\phi)\to\left(\cos\theta,\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,\frac{\rho}{\sqrt{2}}\right),\ (\theta,\phi)\in(0,\pi)\times(0,2\pi)$$

e la formula dell'area (Teorema 1.6):

$$\begin{aligned}K_1(\rho)&=\frac{\rho^2}{2}\int_0^\pi e^{-\sqrt{2}r^2\rho\cos\theta}2\pi\sin\theta d\theta=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}\int_0^\pi e^{-\sqrt{2}r^2\rho\cos\theta}(\sqrt{2}r^2\rho\sin\theta)d\theta\\&=\left[\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}e^{-\sqrt{2}r^2\rho\cos\theta}\right]_0^\pi=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho}-e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right).\end{aligned}$$

Con le coordinate $(\theta,\phi)\to(\cos\theta,\sin\theta\sin\phi,\sin\theta\cos\phi,-\frac{\rho}{\sqrt{2}})$ otteniamo esattamente lo stesso risultato per $K_2(\rho)$. Quindi:

$$\begin{aligned}J(\rho)&=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho}+e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)\left(e^{\sqrt{2}r^2\rho}-e^{-\sqrt{2}r^2\rho}\right)\\&=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}e^{-r^2(\rho^2+2)}\left(e^{2\sqrt{2}r^2\rho}-e^{-2\sqrt{2}r^2\rho}\right)=\frac{\pi\rho}{\sqrt{2}r^2}\left(e^{-r^2(\rho-\sqrt{2})^2}-e^{-r^2(\rho+\sqrt{2})^2}\right).\end{aligned}$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned}
I(r) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left[\int_0^\infty e^{-r^2(\rho-\sqrt{2})^2}\rho d\rho - \int_0^\infty e^{-r^2(\rho+\sqrt{2})^2}\rho d\rho\right]\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}(t+\sqrt{2})dt - \int_{\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}(t-\sqrt{2})dt\right]\\
&= \frac{\pi}{\sqrt{2}r^2}\left\{\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} e^{-r^2t^2}tdt + \sqrt{2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}dt - \int_{\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}dt\right]\right\}\\
&= \frac{\pi}{r^2}\left[\int_{-\sqrt{2}}^\infty e^{-r^2t^2}dt - \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} e^{-r^2t^2}dt\right] = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{r^3}
\end{aligned}$$

Passo 2. Fissato $p \in \Gamma\backslash\{0\}$, vogliamo mostrare che per ogni $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$ esiste una costante c_φ tale che:

$$\int \varphi\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) = c_\varphi r^3. \tag{4.2}$$

Poniamo allora $\mathcal{B}$ come l'insieme di tutte le funzioni reali che soddisfano questa uguaglianza. La relazione (4.1) è equivalente a:

$$\int e^{-\frac{|x-p|^2}{r^2}} d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma = cr^3,$$

la cui derivata rispetto ad r è:

$$\int \frac{2|x-p|^2}{r^3} e^{\frac{-|x-p|^2}{r^2}} d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) = cr^2$$

e quindi:

$$\int \left(\frac{|x-p|}{r}\right)^2 e^{\left(\frac{-|x-p|}{r}\right)^2} d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) = cr^3.$$

Allora la funzione $\varphi(x) = x^2e^{-x^2}$ soddisfa l'uguaglianza (4.2). Derivando nuovamente rispetto ad r troviamo che anche $\varphi(x) = (4x^4 - 6x^2)e^{-x^2}$ rispetta la (4.2), di conseguenza tale uguaglianza vale anche per $\varphi(x) = x^4e^{-x^2}$. Procedendo in questo modo si dimostra per induzione che

$$\varphi(x) = x^{2k}e^{-x^2} \in \mathcal{B}$$

per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ma allora, dato un polinomio $P \in \mathcal{P}$, anche $\varphi(x) = P(x^2)e^{-x^2} \in \mathcal{B}$. Se $p \in \Gamma$ anche $ap \in \Gamma$ per $a > 0$ e quindi, posto $\tilde{P}(\cdot) = P(a^{-1}\cdot)$:

$$
\begin{aligned}
cr^3 &= \int \tilde{P}\left(\frac{|x-ap|^2}{r^2}\right) e^{-\frac{|x-ap|^2}{r^2}} d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) \\
&= \int_{a\Gamma} P\left(\frac{|x/a-p|^2}{r^2}\right) e^{-a\frac{|x/a-p|^2}{r^2}} d\mathcal{H}^3(x) \\
&= \int_{\Gamma} P\left(\frac{|x-p|^2}{r^2}\right) e^{-a\frac{|x-p|^2}{r^2}} dT_{0,a}\mathcal{H}^3(x) \\
&= a^3 \int_{\Gamma} P\left(\frac{|x-p|^2}{r^2}\right) e^{-a\frac{|x-p|^2}{r^2}} d\mathcal{H}^3(x).
\end{aligned}
$$

Quindi $P(x^2)e^{-ax^2} \in \mathcal{B}$, per $a > 0$ e $P \in \mathcal{P}$. Per linearità allora $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{B}$. Fissiamo $\varphi \in C_c(\mathbb{R})$; esiste una successione di funzioni $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_1$ che converge uniformemente a $\varphi(x)$, di conseguenza abbiamo che:

$$
\int \varphi\left(\frac{|x-p|}{r}\right) \mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) = \lim_{r\to\infty} \int \gamma_k\left(\frac{|x-p|}{r}\right) \mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x)
$$

e siccome ciascuna γ_k sta in $\mathcal{B}$, esiste una costante c_φ per la quale φ soddisfa la relazione (4.2).

Passo 3. Fissiamo $p \in \Gamma\backslash\{0\}$ e sia $\{\varphi_k\} \subset C_c(0,1)$ una successione di funzioni che converge puntualmente a $\chi_{(0,1)}$. In questo caso la successione delle costanti c_{φ_k} sarebbe limitata, quindi a meno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che esista una costante $c_p = \lim_{k\to\infty} c_{\varphi_k}$. Allora:

$$
\begin{aligned}
c_p r^3 = \lim_{k\to\infty} c_{\varphi_k} r^3 &= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) \\
&= \int \chi_{(0,1)}\left(\frac{|x-p|}{r}\right) d\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(x) = \mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(B(p,r))
\end{aligned}
$$

per ogni $r > 0$. Dal momento che $\Gamma\backslash\{0\}$ è una varietà 3-dimensionale, la sua densità in p è 1 e di conseguenza:

$$
c_p = \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{H}^3(\Gamma \cap B(p,r))}{r} = \omega_3.
$$

Sia $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una successione di punti in $\Gamma\backslash\{0\}$ tendente a 0. Siccome per ogni $r > 0$ le funzioni $\chi_{B(p_k,r)}$ tendono puntualmente a $\chi_{B(0,r)}$ abbiamo anche che:

$$
\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma(B(0,r)) = \omega_3 r^3.
$$

Abbiamo dimostrato che $\mathcal{H}^3 \llcorner \Gamma$ è una misura 3-uniforme.

4.3 Classificazioni note

Il Teorema 4.1 dà una classificazione delle misure n-uniformi in codimensione 1. Per $\mathbb{R}^5$ sono state classificate anche quelle in codimensione 2.

Teorema 4.2 (Classificazione in $\mathbb{R}^5$)**.** *Sia ν una misura conica 3-uniforme in $\mathbb{R}^5$ con supporto Σ. Allora Σ è uno dei seguenti 3 insiemi:*

1. *Un 3-piano affine;*
2. $\{x \in \mathbb{R}^5 \, : \, x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \, x_5 = 0\}$*;*
3. $\{x \in \mathbb{R}^5 \, : \, x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \, x_5^2 = 2x_4^2\}$*.*

La dimostrazione, dovuta a Nimer, è in [12] Teorema 3.12. Per ottenere questo risultato ha prima approfondito lo studio del supporto della componente sferica di una misura conica 3-uniforme, giungendo alla conclusione che deve essere un'unione di sfere 2-dimensionali con centri e raggi rispettanti alcune proprietà. In particolare, l'insieme dei centri deve essere in distanza simmetrica (si veda la Definizione 3.8 in [12]). Infatti l'insieme $\{x_5^2 = 2x_4^2\}$ è l'unione dei piani $\{x_5 + \sqrt{2}x_4 = 0\} \cup \{x_5 - \sqrt{2}x_4 = 0\}$ e l'intersezione di $\{x \in \mathbb{R}^5 \, : \, x_4^2 = x_1^2+x_2^2+x_3^2, \, x_5^2 = 2x_4^2\}$ con la sfera unitaria $\{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2 = 1\}$ dà le 2-sfere

$$S_l = \{(z_1, z_2, z_3, 0, 0) + c_l, z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = \frac{1}{4}\}.$$

c_l è un punto $(0, 0, 0, z_4, z_5)$ tale che

$$z_4^2 = \frac{1}{4}, \, z_5^2 = \frac{1}{2}.$$

Ci sono quindi quattro 2-sfere S_l e rispettano la proprietà della distanza simmetrica. Mostra poi come le condizioni trovate sulle sfere 2-dimensionali siano anche sufficienti per costruire una misura conica 3-uniforme, ottenendo la classificazione qui riportata nel caso di $\mathbb{R}^5$. Generalizzando questi risultati in dimensione maggiore ottiene:

Teorema 4.3. *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia C_k il cono in $\mathbb{R}^{k+4}$ così definito:*

$$C_k = \left\{x_4^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right\} \cap \left(\bigcap_{l=1}^{k} \{x_{l+4}^2 = 2^l x_4^2\} \right).$$

Allora per ogni $x \in C_k$, per ogni $r > 0$:

$$\mathcal{H}^3(B(x, r) \cap C_k) = \frac{4}{3}\pi r^3.$$

La dimostrazione è nel Teorema 4.4 in [12]. Preiss in [4] dimostra che per $n = 1, 2$ in $\mathbb{R}^d$ le sole misure n-uniformi sono le misure piatte. Siamo quindi a conoscenza di tutte le possibili misure n-uniformi in $\mathbb{R}^d$ per $d = 1, ..., 5$. Per dimensioni maggiori, il problema è aperto.

Bibliografia

[1] A. Dali Nimer,
A sharp bound on the Hausdorff dimension of the singular set of a uniform measure.
Springer-Verlag GmbH Germany, 2017.

[2] Pertti Mattila,
Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces. Fractals and rectifiability.
Cambridge University Press, 1995.

[3] Herbert Federer,
Geometric Measure Theory.
Springer-Verlag 1969.

[4] David Preiss,
Geometry of measures in $\mathbb{R}^d$: Distribution, rectifiability, and densities.
Annals of Mathematics, 125 (1987), 537-643.

[5] Heim Brezis,
Analisi Funzionale, Teoria e applicazoni.
Liguori Editore, S.r.l., 1986.

[6] Walter Rudin,
Principles of Mathematical Analysis.
McGraw-Hill, 1976.

[7] Camillo De Lellis,
Rctifiable Sets, Densities and Tangent Measures.
European Mathematical Society, 2008.

[8] D. Preiss, T.Tolsa, X.Toro,
On the smoothness of Hölder doubling measures.
Springer-Verlag, 2008.

[9] Guy David, Stephen Semmens,
Analysis of and on Uniformly Rectifiable Sets.
Mathematical Surveys and Monographs, 1991.

[10] Leon Simon,
Lectures on Geometriv Measure Theory.
Centre for Mathematical Analysis, volume 3, 1983.

[11] Oldrich Kowalski, David Preiss,
Besicovitch-type properties of measures and submanifolds.
Jurnal fur die reigne und angewandte Mathematik, 1987.

[12] A. Dali Nimer,
Conical 3-uniform measures: a family of new examples and characterizations
Mathemathics archive, Metric Geometry, 2018

[13] J.M. Marstrand,
The (ϕ, s) regular subset of n space.
Transactions of the American Mathematical Society, 1964.

[14] Bernd Kirchheim, David Preiss,
Uniformly distriibuted measures in Euclidean spaces.
Mathematica Scandinavica, 2002.