



UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA



DIPARTIMENTO
MATEMATICA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Tesi di Laurea Triennale

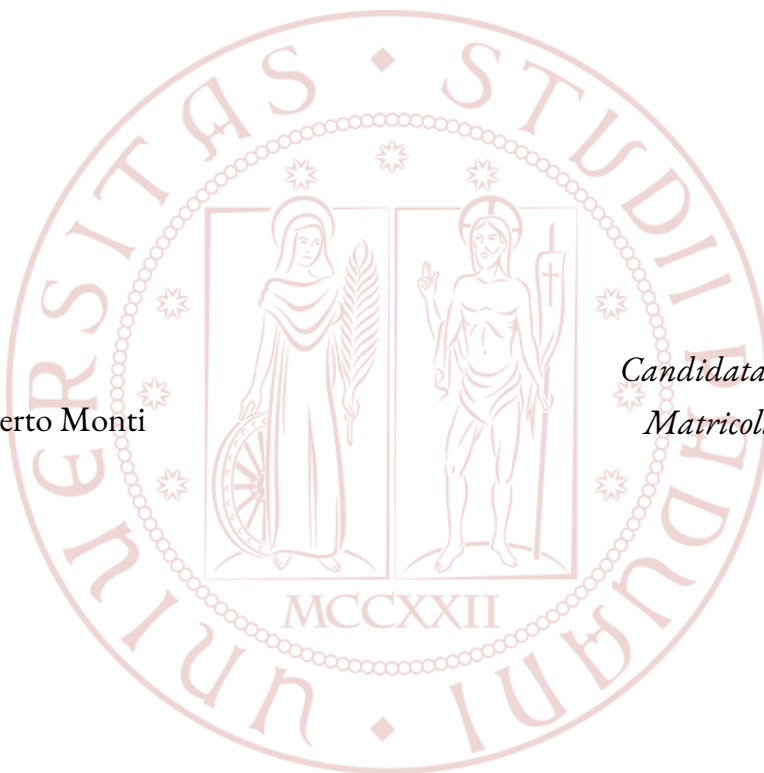
**Dimensioni topologica e metriche a confronto
e teorema di immersione di Assouad**

Relatore:

Prof. Roberto Monti

Candidata: Sara Asad

Matricola: 2072943



Anno Accademico 2024 - 2025

12 Dicembre 2025

Indice

Introduzione	3
1 Dimensioni topologica e metriche	5
1.1 Dimensione topologica	5
1.2 Dimensione di Hausdorff	9
1.3 Dimensione di Assouad	14
2 Le tre dimensioni a confronto	17
3 Il teorema di immersione di Assouad	25
Lista dei simboli	31
Bibliografia	33

Introduzione

La teoria matematica della dimensione nasce tra la fine dell'Ottocento e l'inizio del Novecento dall'esigenza di formalizzare il concetto intuitivo di dimensione. Una delle prime nozioni sviluppate è quella di dimensione topologica, nota anche come dimensione di Lebesgue o *covering dimension*. È stata introdotta agli inizi del Novecento e successivamente sistematizzata da W. Hurewicz e H. Wallman (1941) in *Dimension Theory*, [11], e poi largamente trattata da R. Engelking (1978) in *Dimension Theory*, [6].

La definizione, formulata nel linguaggio della topologia generale, si basa sul concetto di ricoprimento, e in particolare sull'ordine minimo che può assumere una famiglia finita di insiemi aperti che ricopre lo spazio topologico. Per costruzione, la dimensione topologica è un invariante topologico e assume solamente valori interi, risultando talvolta poco sensibile alle proprietà metriche dello spazio. Da questo problema è nata l'esigenza di introdurre nozioni di dimensione legate alla struttura metrica, dette dimensioni metriche.

La dimensione metrica più studiata è la dimensione di Hausdorff, introdotta da F. Hausdorff (1919) in [9]. Essa riveste un ruolo importante sia nella teoria geometrica della misura che nella teoria dei sistemi dinamici. È definita a partire dalla misura di Hausdorff s -dimensionale $\mathcal{H}^s$ ed equivale all'unico valore s per il quale tale misura passa da $+\infty$ a 0.

Oltre alla definizione e alle sue principali proprietà, nel primo capitolo vengono presentate anche la definizione di attrattore di un sistema di funzioni iterate e quella di condizione dell'insieme aperto, per cui si veda [7], che spesso sono utili per il calcolo della dimensione di Hausdorff.

A differenza della dimensione topologica, la dimensione di Hausdorff può assumere anche valori non interi. L'obiettivo principale del secondo capitolo è presentare il teorema che mette in relazione queste due nozioni di dimensione: in ogni spazio metrico la dimensione di Hausdorff è sempre maggiore o uguale alla dimensione topologica.

La terza dimensione trattata nel primo capitolo è la dimensione di Assouad. Essa è definita a partire dai concetti equivalenti di spazio metrico *omogeneo* e di spazio metrico *doubling*, ed è legata al numero di palle di un fissato raggio $\rho > 0$ necessarie per ricoprire una palla di raggio

$r > \rho$ in uno spazio metrico (X, d) . Si tratta della più grande tra le dimensioni metriche note definite tramite i ricoprimenti; in particolare, negli spazi metrici la dimensione di Assouad è sempre maggiore o uguale alla dimensione di Hausdorff.

Anche se l'idea della definizione di dimensione di Assouad era già stata usata da G. Bouligand (1928) in [3], la sua definizione formale è stata introdotta da P. Assouad (1979) in [1] nel contesto dello studio dell'esistenza di un'applicazione

$$\varphi : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

in grado di immergere in modo bi-Lipschitz uno spazio metrico (X, d) in un opportuno spazio euclideo. Affinchè una tale immersione possa esistere, lo spazio metrico deve necessariamente essere omogeneo, cioè la sua dimensione di Assouad deve essere finita.

Il teorema di immersione di Assouad, argomento del terzo capitolo, fornisce una risposta parziale a questa domanda e mostra che una simile immersione esiste sempre, ma a condizione di sostituire alla distanza iniziale d la metrica d^α , con $\alpha \in (0, 1)$.

Capitolo 1

Dimensioni topologica e metriche

1.1 Dimensione topologica

Definizione 1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ una famiglia di sottoinsiemi di X . Per ogni $x \in X$ si definisce l'ordine di α nel punto x come

$$\text{ord}_x(\alpha) := -1 + \#\{i \in I \mid x \in A_i\}.$$

L'ordine di α è:

$$\text{ord}(\alpha) := \sup_{x \in X} \text{ord}_x(\alpha).$$

Nel caso in cui $X = \emptyset$, per ogni famiglia α di sottoinsiemi di X , si pone per convenzione $\text{ord}(\alpha) := -1$.

Osservazione 1.1. In modo equivalente, si può definire l'ordine di α come il massimo numero intero n per il quale si possano trovare $n + 1$ indici distinti $i_0, \dots, i_n \in I$ tali che

$$A_{i_0} \cap A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset.$$

Infatti, se n è il massimo numero per il quale esistano $n + 1$ indici distinti $i_0, \dots, i_n$ tali che $A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$, allora, preso $x \in A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_n}$, x appartiene ad almeno $n + 1$ insiemi di α . Segue che $\text{ord}(\alpha) \geq \text{ord}_x(\alpha) \geq -1 + (n + 1) = n$.

Se, per assurdo, $\text{ord}(\alpha) = m > n$, esisterebbe $x \in X$ tale che $\text{ord}_x(\alpha) = m$, e quindi tale che $x \in A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_m} \neq \emptyset$ per una famiglia di indici distinti $j_0, \dots, j_m$; questo contraddice la massimalità di n . L'ordine di α è quindi $\text{ord}(\alpha) = n$.

Viceversa, se $\text{ord}(\alpha) = n$, esiste almeno un elemento $x \in X$ tale che $\text{ord}_x(\alpha) = n$, e quindi esistono $n + 1$ insiemi distinti di α $A_{i_0}, \dots, A_{i_n}$ tali che $x \in A_{i_0} \cap \dots \cap A_{i_n} \neq \emptyset$.

Se, per assurdo, esistessero $n + 2$ indici distinti $j_0, \dots, j_{n+1} \in I$ tali che $A_{j_0} \cap \dots \cap A_{j_{n+1}} \neq \emptyset$, esisterebbe $y \in X$ tale che $y \in A_{j_k}$ per ogni $k \in \{0, \dots, n + 1\}$. Si avrebbe quindi che $\text{ord}(\alpha) \geq \text{ord}_y(\alpha) \geq n + 1$, in contraddizione con l'ipotesi iniziale che $\text{ord}(\alpha) = n$. Esistono quindi al massimo $n + 1$ elementi di α con intersezione non vuota.

Definizione 1.2. Una famiglia di sottoinsiemi $\alpha = (A_i)_{i \in I}$, con $A_i \subseteq X$ per ogni $i \in I$, è un *ricoprimento* di X se $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Inoltre, α è un ricoprimento aperto se A_i è aperto in X per ogni $i \in I$.

Definizione 1.3. Siano $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ e $\beta = (B_j)_{j \in J}$ due ricoprimenti di X . Si dice che β è più fine di α se per ogni $j \in J$ esiste $i \in I$ tale che $B_j \subseteq A_i$, e si denota con $\beta \succ \alpha$.

Definizione 1.4. Sia $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X . Si definisce

$$D(\alpha) := \min_{\beta} \text{ord}(\beta)$$

dove i β variano tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X più fini di α .

Definizione 1.5. La *dimensione topologica* di uno spazio metrico (X, d) è definita come:

$$\dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha) \in \{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\},$$

dove gli α variano tra tutti i ricoprimenti aperti finiti di X .

Osservazione 1.2. La dimensione topologica è un invariante topologico: se X e Y sono omeomorfi, allora

$$\dim(X) = \dim(Y).$$

Infatti, un omeomorfismo $f: X \rightarrow Y$ è una funzione continua, biettiva, con inversa continua, e quindi trasforma ricoprimenti aperti finiti di X in ricoprimenti aperti finiti di Y .

Più precisamente, sia $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto finito di X , la cui immagine tramite f è $f(\alpha) = (f(A_i))_{i \in I}$. Per ogni $i \in I$, A_i è un aperto in X e l'inversa di f è continua, dunque $f(A_i)$ è un aperto in Y . Inoltre, f è suriettiva, quindi $f(X) = Y$. Dunque

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i),$$

cioè $(f(A_i))_{i \in I}$ è un ricoprimento di Y .

Considerando poi $\beta = (B_j)_{j \in J}$ un ricoprimento più fine di α , cioè tale che per ogni $j \in J$ esista $i \in I$ per cui $B_j \subseteq A_i$, si ha che $f(B_j) \subseteq f(A_i)$, e quindi $f(\beta)$ è un ricoprimento di Y più fine di $f(\alpha)$.

Fissati $x \in X$ e $y = f(x)$, per la biettività di f il numero di insiemi $f(A_i)$ che contengono y è uguale al numero di insiemi A_i che contengono x , e y appartiene a $f(A_i)$ se e solo se x appartiene ad A_i . È quindi possibile rappresentare tutti i ricoprimenti aperti di Y nella forma $f(\alpha)$, dove α è un ricoprimento aperto di X .

Lo stesso ragionamento vale scambiando X e Y , perchè $f^{-1}: Y \rightarrow X$ è un omeomorfismo.

Segue che, per ogni ricoprimento aperto finito α di X ,

$$D(\alpha) = \min_{\beta} \text{ord}(\beta) = \min_{\beta} \text{ord}(f(\beta)) = D(f(\alpha)),$$

dove i β variano tra i ricoprimenti aperti finiti più fini di α , e passando al sup si conclude che:

$$\dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha) = \sup_{\alpha} D(f(\alpha)) =: \dim(Y).$$

Definizione 1.6. Sia (X, d) uno spazio metrico. Il *diametro* di un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è

$$|Y| := \text{diam}(Y) := \sup_{y_1, y_2 \in Y} d(y_1, y_2) \in [0, +\infty].$$

Definizione 1.7. Il *mesh* di un ricoprimento $\alpha = (A_i)_{i \in I}$ di X è definito da

$$\text{mesh}(\alpha) := \sup_{i \in I} |A_i| \in [0, +\infty].$$

Proposizione 1.1. Sia (X, d) uno spazio metrico compatto e sia $n \in \mathbb{N}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- i) $\dim(X) \leq n$;
- ii) per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un ricoprimento aperto finito α di X tale che $\text{mesh}(\alpha) \leq \varepsilon$ e $\text{ord}(\alpha) \leq n$;
- iii) esiste una successione $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ di ricoprimenti aperti finiti di X tale che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{mesh}(\alpha_k) = 0 \quad \text{e} \quad \text{ord}(\alpha_k) \leq n \quad \text{per ogni } k \in \mathbb{N}.$$

Per una dimostrazione della Proposizione 1.1 si veda [4], Proposizione 1.4.4.

Esempio 1.1. L'intervallo $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ ha dimensione topologica $\dim([0, 1]) = 1$.

Siccome $[0, 1]$ è connesso, per l'Osservazione 1.1 si ha che $\dim([0, 1]) \geq 1$. Si prova ora che $\dim([0, 1]) \leq 1$. Preso $k \geq 2$ un intero, si considerano i punti

$$x_i := \frac{i}{2k} \in [0, 1] \quad \text{per ogni } i \in \{0, 1, \dots, 2k\}.$$

Sia α_k il ricoprimento aperto finito di $[0, 1]$, i cui elementi sono $[x_0, x_2)$, $(x_{2k-2}, x_{2k}]$ e tutti gli intervalli della forma (x_i, x_{i+2}) , con $i \in \{1, \dots, 2k-3\}$. Dall'Osservazione 1.1 segue che $\text{ord}(\alpha_k) = 1$. Inoltre, $\text{mesh}(\alpha_k) = \frac{i+2}{2k} - \frac{i}{2k} = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ e per la Proposizione 1.1 si conclude che $\dim([0, 1]) \leq 1$.

Per le Definizioni 1.6 e 1.7 e per la Proposizione 1.1 occorre che all'insieme X sia associata una metrica d , mentre gli altri risultati, presentati nel caso particolare degli spazi metrici, sono validi per tutti gli spazi topologici.

Inoltre, se lo spazio topologico è normale, come nel caso di ogni spazio metrizzabile, la dimensione topologica risulta invariante rispetto all'unione numerabile di insiemi chiusi.

Definizione 1.8. Uno spazio topologico (X, τ) si dice *normale* se, dati due sottoinsiemi chiusi e disgiunti $A, B \subseteq X$, esistono due sottoinsiemi aperti e disgiunti $U, V \subseteq X$ tali che $A \subseteq U$ e $B \subseteq V$.

Teorema 1.1. Siano (X, τ) uno spazio topologico normale e $\{F_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di sottoinsiemi chiusi di X tale che

$$X = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} F_k.$$

Allora

$$\dim(X) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \dim(F_k).$$

Per una dimostrazione del Teorema 1.1 si rimanda a [4], Teorema 1.7.1.

Esempio 1.2. La retta reale $\mathbb{R}$, dotata della distanza euclidea standard, ha dimensione topologica $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

La retta reale si può scrivere come unione numerabile di intervalli chiusi e limitati:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{k=1}^{\infty} [-k, k].$$

Ogni intervallo chiuso e limitato in $\mathbb{R}$ è omeomorfo a $[0, 1]$, quindi, per l'Osservazione 1.2, $\dim([-k, k]) = \dim([0, 1]) = 1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il Teorema 1.1 implica che la dimensione topologica di $\mathbb{R}$ è $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

Esempio 1.3. La dimensione topologica dello spazio euclideo $\mathbb{R}^n$, dotato della distanza euclidea standard, è $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Vale che

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k,$$

dove per ogni $k \in \mathbb{N}$ il sottoinsieme F_k è l'ipercubo $F_k = [-k, k]^n$ e si ha che $\dim(F_k) = \dim([0, 1]^n) = n$, come dimostrato in [4], Teorema 3.5.4. Pertanto, per il Teorema 1.1, la

dimensione topologica di $\mathbb{R}^n$ è

$$\dim(\mathbb{R}^n) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \dim(F_k) = n.$$

1.2 Dimensione di Hausdorff

Considerato (X, d) uno spazio metrico e preso $\delta > 0$, si dice che una collezione numerabile di sottoinsiemi $(U_i)_{i=1}^\infty$ di X è un δ -ricoprimento di un sottoinsieme $A \subseteq X$ se

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^\infty U_i \quad \text{e} \quad 0 < |U_i| \leq \delta \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, \infty\},$$

dove si ricorda che $|U_i|$ indica il diametro di U_i .

Definizione 1.9. Siano (X, d) uno spazio metrico e $A \subseteq X$ un suo sottoinsieme. Presi $s \geq 0$ e $\delta > 0$, si definisce la premisura

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s : (U_i)_{i=1}^\infty \text{ è un } \delta\text{-ricoprimento di } A \right\}.$$

La *misura di Hausdorff s -dimensionale* si ottiene affinando il ricoprimento coinvolto nella definizione di $\mathcal{H}_\delta^s$:

$$\mathcal{H}^s(A) := \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) \in [0, \infty].$$

Osservazione 1.3. $\mathcal{H}^s(A)$ è ben definita: il limite esiste poiché $\mathcal{H}_\delta^s(A)$ aumenta quando δ decresce.

Definizione 1.10. Sia (X, d) uno spazio metrico. La *dimensione di Hausdorff* di un sottoinsieme $A \subseteq X$ è

$$\dim_H(A) := \inf \{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = 0\}.$$

Proposizione 1.2. Per ogni $A \subseteq X$, $\dim_H(A) = \sup \{d \geq 0 : \mathcal{H}^d(A) = \infty\}$.

Dimostrazione. Sia $\alpha = \dim_H(A)$. Poiché la funzione che ad ogni $d \geq 0$ associa $\mathcal{H}^d(A)$ è decrescente e non-negativa, si ha che $\mathcal{H}^d(A) = 0$ per ogni $d > \alpha$. È quindi sufficiente mostrare che $\mathcal{H}^d(A) = \infty$ per ogni $d < \alpha$.

Fissato $d < \alpha$ e preso $\beta \in (d, \alpha)$, poiché $\beta < \alpha := \inf \{s : \mathcal{H}^s(A) = 0\}$, si ha che $\mathcal{H}^\beta(A) > 0$.

Sia ora $(U_i)_{i=1}^\infty$ un δ -ricoprimento di A . Poiché $d - \beta < 0$, vale che

$$|U_i|^{(d-\beta)} \geq \delta^{(d-\beta)} \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, \infty\}.$$

Allora

$$\sum_{i=1}^\infty |U_i|^d = \sum_{i=1}^\infty |U_i|^\beta \cdot |U_i|^{(d-\beta)} \geq \delta^{(d-\beta)} \sum_{i=1}^\infty |U_i|^\beta,$$

da cui, prendendo l'estremo inferiore di tutti i δ -ricoprimenti $(U_i)_{i=1}^\infty$ di A , segue che

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) \geq \delta^{(d-\beta)} \cdot \mathcal{H}_\delta^\beta(A).$$

Poichè $\delta^{(d-\beta)} \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$, si ha che $\mathcal{H}_\delta^d(A) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \infty$, cioè $\mathcal{H}^d(A) = \infty$. □

Lemma 1.1. *La dimensione di Hausdorff soddisfa le seguenti proprietà:*

- i) è monotona: se $A, B \subseteq X$ sono due sottoinsiemi tali che $A \subseteq B$, allora $\dim_H(A) \leq \dim_H(B)$;*
- ii) è stabile rispetto all'unione numerabile: se $\{F_i\}_{i \geq 1}$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi di X , allora*

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right) = \sup_{i \geq 1} \dim_H(F_i);$$

- iii) per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, con $\mathbb{R}^n$ dotato della distanza standard, si ha che $\dim_H(U) = n$. In particolare, $\dim_H(\mathbb{R}^n) = n$;*
- iv) se $F \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme numerabile, allora $\dim_H(F) = 0$.*

Per una dimostrazione delle proprietà *i), iii), iv)* si veda [7]. Si presenta invece la dimostrazione della proprietà *ii)*, che verrà usata per provare la Proposizione 2.2.

Dimostrazione. Presa $\{F_i\}_{i \geq 1}$ una famiglia numerabile di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, dalla proprietà *i)* di monotonia segue che

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right) \geq \dim_H(F_i) \quad \text{per ogni } i \geq 1,$$

cioè

$$\dim_H \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right) \geq \sup_{i \geq 1} \dim_H(F_i).$$

D'altra parte, se si prende $s > \dim_H(F_i)$ per ogni sottoinsieme F_i , si ha che $\mathcal{H}^s(F_i) = 0$ per ogni $i \geq 1$, e quindi, usando la subadditività di $\mathcal{H}^s$, si ottiene

$$\mathcal{H}^s \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right) \leq \sum_{i=1}^\infty \mathcal{H}^s(F_i) = 0,$$

cioè $s > \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right)$. Si scelgono ora $\varepsilon > 0$ e $s = \sup_{i \geq 1} \dim_H(F_i) + \varepsilon$. Allora

$$\sup_{i \geq 1} \dim_H(F_i) + \varepsilon > \dim_H \left(\bigcup_{i=1}^\infty F_i \right),$$

e, passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$, si ottiene la disuguaglianza opposta. □

Si consideri ora una *contrazione* su $\mathbb{R}^n$, cioè una funzione $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ per la quale esista una costante $0 < c < 1$, detta *ragione*, tale che

$$|T(x) - T(y)| \leq c|x - y| \quad \text{per ogni } x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1)$$

Si dice che una famiglia finita di contrazioni $\{S_1, \dots, S_m\}$ di ragioni rispettivamente $c_1, \dots, c_m$, con $m \geq 2$, è un *sistema di funzioni iterate* o *IFS*.

Un *attrattore* per l'IFS è un sottoinsieme $F \subseteq \mathbb{R}^n$, non vuoto e compatto, tale che

$$F = \bigcup_{i=1}^m S_i(F).$$

Ad ogni IFS è associato un unico attrattore F . In particolare, considerando $\mathcal{S}$ una famiglia di sottoinsiemi non vuoti e compatti di $\mathbb{R}^n$, si definisce la funzione $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ tale che

$$S(E) = \bigcup_{i=1}^m S_i(E) \quad \text{per ogni } E \in \mathcal{S}.$$

Si indica poi con S^k la k -esima iterata di S : S^0 è l'identità in $\mathcal{S}$, cioè $S^0(E) = E$ per ogni $E \in \mathcal{S}$, e per ogni $k \geq 1$ vale $S^k = S \circ S^{k-1}$.

Allora, per ogni insieme $E \in \mathcal{S}$ tale che $S_i(E) \subseteq E$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, l'attrattore F è dato dall'intersezione delle immagini di E tramite le funzioni S^k :

$$F = \bigcap_{k=0}^{\infty} S^k(E).$$

Per una dimostrazione dell'esistenza e dell'unicità dell'attrattore si veda [7], Teorema 9.1.

Si considera ora il caso in cui il sistema di funzioni iterate soddisfi la seguente condizione e sia costituito da *similitudini*, cioè funzioni per le quali in (1.1) valga l'uguaglianza.

Definizione 1.11. Si dice che le similitudini S_i soddisfano la *condizione dell'insieme aperto* se esiste un insieme non vuoto, aperto e limitato $V \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che

$$\bigcup_{i=1}^m S_i(V) \subseteq V$$

e in cui l'unione sia disgiunta.

Se vale la condizione dell'insieme aperto, la dimensione di Hausdorff dell'attrattore F risulta essere $\dim_H(F) = s$, dove $s \geq 0$ è l'unico valore tale che

$$\sum_{i=1}^m c_i^s = 1.$$

Esempio 1.4 (Il triangolo di Sierpiński). Si consideri un triangolo equilatero pieno $E_0 \subset \mathbb{R}^2$ di lato 1. Congiungendo i punti medi di ogni lato, si costruisca un triangolo equilatero centrale di lato $1/2$ e si rimuova il suo interno da E_0 . Si ottiene così E_1 .

Si effettua poi una costruzione simile sui tre triangoli rimanenti, e si procede in modo analogo ad ogni iterazione, ottenendo una successione decrescente di insiemi $(E_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Il triangolo di Sierpiński è dato dalla loro intersezione:

$$E = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k.$$

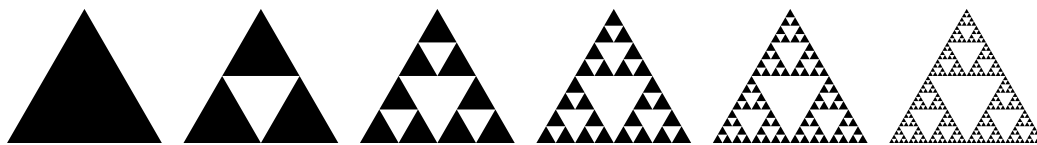


Figura 1.1: Le prime iterazioni nella costruzione del triangolo di Sierpiński.

Il triangolo di Sierpiński è l'attrattore di tre similitudini $S_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $i = 1, 2, 3$, che hanno ragione $1/2$ e che mandano il triangolo iniziale E_0 nei tre triangoli di E_1 . Le immagini di ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tramite le tre similitudini S_i sono rispettivamente:

$$S_1(x, y) = \frac{1}{2}(x, y), \quad S_2(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2}\right), \quad S_3(x, y) = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, \frac{y}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Prendendo come sottoinsieme V l'interno di E_0 , $\text{Int}(E_0)$, si osserva che le tre immagini di V sono disgiunte e contenute in V , e quindi risulta soddisfatta la condizione dell'insieme aperto della Definizione 1.11. Poiché

$$3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1 \quad \text{se e solo se} \quad s = \frac{\log(3)}{\log(2)},$$

si conclude che la dimensione di Hausdorff del triangolo di Sierpiński è

$$\dim_H(E) = \frac{\log(3)}{\log(2)}.$$

Esempio 1.5 (La spugna di Menger). Sia $[0, 1]^3 \subseteq \mathbb{R}^3$ il cubo unitario. Si suddivide ogni spigolo in 3 parti uguali, ottenendo 27 cubi di lato $1/3$. C_1 è il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ ottenuto a partire da C_0 e rimuovendo gli interni del cubo centrale e dei cubi centrali di ogni faccia.

Su ciascuno dei 20 cubi di C_1 si effettuano una suddivisione e rimozione simili, ottenendo C_2 , e si prosegue analogamente ad ogni iterazione. Si costruisce così una successione decrescente di insiemi $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, dove ogni C_k è costituito da cubi con lati di lunghezza $1/3^k$ e quindi ha volume

$$V_k = \left(\frac{20}{27}\right)^k.$$

L'intersezione di questa famiglia di insiemi $C := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_k$ è detta spugna di Menger, e ha volume $V = \lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0$.

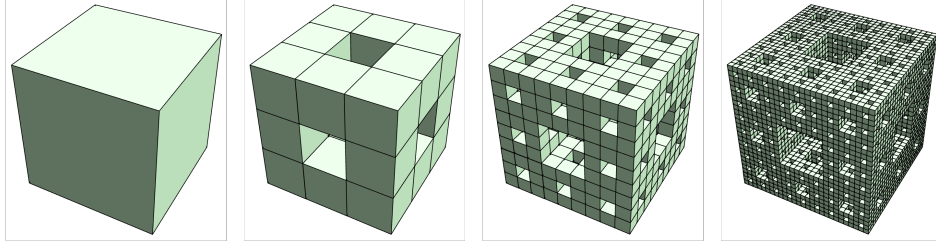


Figura 1.2: Le prime 4 iterazioni nella costruzione della spugna di Menger.

La spugna di Menger è limitata, perché contenuta nel cubo unitario $[0,1]^3$, e chiusa, perché intersezione numerabile di insiemi chiusi. Per il teorema di Heine-Borel, è quindi compatta in $\mathbb{R}^3$. Per costruzione si ha che ogni C_k è connesso per archi e quindi connesso. Pertanto, siccome $\{C_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente, anche C è connessa.

Una volta enumerati i 20 cubi di C_1 , per ogni $j \in \{1, \dots, 20\}$ si definisce $S_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la similitudine di ragione $1/3$ tale che l'immagine di C_0 tramite S_j sia il j -esimo cubo di C_1 .

Ad esempio, se si considera

$$S_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x}{3} + \frac{2}{3}, \frac{y}{3} + \frac{2}{3}, \frac{z}{3} + \frac{2}{3}\right)$$

si ha che $S_1(C_0) = [\frac{2}{3}, 1]^3 \subseteq C_1$, poichè $S_1(0, 0, 0) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, $S_1(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$ e $f(t) = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}$ è continua e crescente per ogni $t \in \mathbb{R}$.

La spugna di Menger è l'attrattore di questo sistema di funzioni iterate. Se si prende $V = \text{Int}(C_0) = (0, 1)^3$, allora

$$\bigcup_{j=1}^{20} S_j(V) = \text{Int}(C_1) \subseteq V,$$

e per costruzione le immagini $S_j(V)$ sono disgiunte.

L'IFS $\{S_1, \dots, S_{20}\}$ soddisfa quindi la condizione dell'insieme aperto.

L'equazione $\sum_{j=1}^{20} \left(\frac{1}{3}\right)^s = 1$ è soddisfatta da $s = \frac{\log(20)}{\log(3)}$, e quindi la dimensione di Hausdorff della spugna di Menger è

$$\dim_H(C) = \frac{\log(20)}{\log(3)}.$$

1.3 Dimensione di Assouad

Preso (X, d) uno spazio metrico, si considerino un sottoinsieme $A \subseteq X$ e $\rho > 0$. In questo sottocapitolo, con la notazione $N(A, \rho)$ si indica il minimo numero di palle di raggio ρ necessario per ricoprire A .

Definizione 1.12. Un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d) è detto (M, s) -omogeneo (o omogeneo) se l'intersezione di A con ogni palla di raggio r può essere ricoperta con $M(r/\rho)^s$ palle di raggio $\rho < r$, cioè

$$N(B(x, r) \cap A, \rho) \leq M \cdot \left(\frac{r}{\rho}\right)^s \quad (1.2)$$

per ogni $x \in A$ e per ogni $r > \rho$.

Per studiare la dimensione di Assouad, è conveniente definire

$$N_A(r, \rho) := \sup_{x \in A} N(B(x, r) \cap A, \rho).$$

Definizione 1.13. Un sottoinsieme A di uno spazio metrico (X, d) è *doubling* se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $r > 0$ l'intersezione di A con ogni palla di raggio r può essere ricoperta da k palle di raggio $r/2$:

$$N_A\left(r, \frac{r}{2}\right) \leq k.$$

Le definizioni di spazio metrico *omogeneo* e di spazio metrico *doubling* sono equivalenti.

Lemma 1.2. *Un sottoinsieme A di uno spazio metrico è omogeneo se e solo se è doubling.*

Dimostrazione. Se A è (M, s) -omogeneo, vale (1.2) per ogni $\rho < r$. Se si prendono $\rho = r/2$ e $k = M \cdot 2^s$, allora

$$N(A \cap B(x, r), r/2) \leq k,$$

cioè A è doubling.

Viceversa, si suppone che esista $k \in \mathbb{N}$ tale che $N_A(r, r/2) \leq k$ per ogni $r > 0$. Dato $0 < \rho < r$, si fissa $n \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{r}{2^n} \leq \rho \leq \frac{r}{2^{n-1}}$. Allora

$$N_A(r, \rho) \leq N_A\left(r, \frac{r}{2}\right) \cdots N_A\left(\frac{r}{2^{n-1}}, \frac{r}{2^n}\right) \leq k^n.$$

Da $n - 1 \leq \log_2\left(\frac{r}{\rho}\right)$ si ha che $k^{n-1} \leq k^{\log_2\left(\frac{r}{\rho}\right)} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\log_2(k)}$, e dunque

$$N_A(r, \rho) \leq k \cdot k^{n-1} \leq k \left(\frac{r}{\rho}\right)^{\log_2(k)},$$

Pertanto A è omogeneo. □

Definizione 1.14. Sia $C \subseteq X$ un sottoinsieme di uno spazio metrico (X, d) . La *dimensione di Assouad* di C è l'estremo inferiore degli $s > 0$ tali che C sia (M, s) -omogeneo per qualche $M > 0$:

$$\dim_A(C) := \inf \left\{ s > 0 : \begin{array}{l} \text{esiste } M > 0 \text{ tale che, per ogni } 0 < r < R, \\ \text{e per ogni } x \in C, N(B(x, R) \cap C, r) \leq M \cdot \left(\frac{R}{r}\right)^s \end{array} \right\}.$$

Lemma 1.3. La *dimensione di Assouad* soddisfa le seguenti proprietà:

- i) è *monotona*: se $A, B \subseteq X$ sono due sottoinsiemi tali che $A \subseteq B$, allora $\dim_A(A) \leq \dim_A(B)$;
- ii) $\dim_A(A \cup B) = \max\{\dim_A(A), \dim_A(B)\}$ per ogni $A, B \subseteq X$;
- iii) è *stabile rispetto alla chiusura*: $\dim_A(F) = \dim_A(\overline{F})$ per ogni $F \subseteq X$;
- iv) Per ogni sottoinsieme aperto $U \subseteq \mathbb{R}^n$, dove $\mathbb{R}^n$ è dotato della distanza standard, vale che $\dim_A(U) = n$. In particolare, $\dim_A(\mathbb{R}^n) = n$.

Per una dimostrazione del Lemma 1.3, si veda [13], Teorema A.5.

Osservazione 1.4. La *dimensione di Assouad* non è stabile per unione numerabile.

Per esempio,

$$\dim_A([0, 1] \cap \mathbb{Q}) = \dim_A([0, 1]) = \dim_A((0, 1)) = 1,$$

ma l'insieme $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ è un'unione numerabile di singoletti, ciascuno dei quali ha *dimensione di Assouad* 0.

Le applicazioni bi-Lipschitz tra due spazi metrici preservano l'omogeneità. Una conseguenza immediata di questo risultato è che la *dimensione di Assouad* è stabile rispetto a mappe bi-Lipschitz.

Definizione 1.15. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Si dice che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è *bi-Lipschitz* se esiste una costante $0 < L < +\infty$ tale che

$$\frac{1}{L} \cdot d_X(x_1, x_2) \leq d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq L \cdot d_X(x_1, x_2), \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X.$$

Lemma 1.4. Siano (X, d_X) uno spazio metrico (M, s) -omogeneo e (Y, d_Y) uno spazio metrico. Se $f : X \rightarrow Y$ è una funzione bi-Lipschitz di costante $L > 0$, allora $f(X) \subseteq Y$ è un sottoinsieme $(M \cdot L^{2s}, s)$ -omogeneo.

Dimostrazione. Si considerino un elemento $y \in f(X)$ e l'intersezione $B_{d_Y}(y, r) \cap f(X)$, dove $B_{d_Y}(y, r)$ è la palla di centro y e raggio $r > 0$ rispetto alla distanza d_Y .

Preso $x = f^{-1}(y)$, poiché la funzione inversa f^{-1} è di Lipschitz, si ha che

$$f^{-1}(B_{d_Y}(y, r) \cap f(X)) \subseteq f^{-1}(B_{d_Y}(y, r)) \cap f^{-1}(f(X)) = B_{d_X}(x, Lr) \cap X = B_{d_X}(x, Lr). \quad (1.3)$$

Inoltre, X è uno spazio (M, s) -omogeneo, quindi la palla $B_{d_X}(x, Lr)$ può essere ricoperta con $N \leq M \cdot \left(\frac{Lr}{\frac{\rho}{L}}\right)^s = M \cdot L^{2s} \left(\frac{r}{\rho}\right)^s$ palle di raggio $\frac{\rho}{L} < Lr$, cioè

$$B_X(x, Lr) \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_X\left(x_j, \frac{\rho}{L}\right).$$

La funzione f è di Lipschitz, quindi

$$f\left(B_{d_X}\left(x_j, \frac{\rho}{L}\right)\right) \subseteq B_{d_Y}(f(x_j), \rho) \quad \text{per ogni } j \in \{1, \dots, N\},$$

e da (1.3) segue che

$$\begin{aligned} B_{d_Y}(y, r) \cap f(X) &\subseteq f(B_{d_X}(x, Lr)) \\ &= f\left(\bigcup_{j=1}^N B_{d_X}\left(x_j, \frac{\rho}{L}\right)\right) = \bigcup_{j=1}^N f\left(B_{d_X}\left(x_j, \frac{\rho}{L}\right)\right) \subseteq \bigcup_{j=1}^N B_{d_Y}(f(x_j), \rho). \end{aligned}$$

Pertanto $f(X)$ è (ML^{2s}, s) -omogeneo. □

Lemma 1.5. *Siano (X, d) uno spazio metrico e $F \subseteq X$ un suo sottoinsieme non vuoto. Se $T : X \rightarrow X$ è bi-Lipschitz, allora*

$$\dim_A(T(F)) = \dim_A(F).$$

Dimostrazione. Sia $s = \dim_A(F)$. Il Lemma 1.4 implica che $\dim_A(T(F)) \leq s$. Se per assurdo $s' = \dim_A(T(F)) < s$, poiché anche la funzione T^{-1} è bi-Lipschitz, sempre per il Lemma 1.4 si avrebbe che $\dim_A(F) = \dim_A(T^{-1}(T(F))) \leq s' < s$, in contraddizione con la minimalità di s . □

Capitolo 2

Le tre dimensioni a confronto

In ogni spazio metrico la dimensione di Hausdorff è maggiore o uguale alla dimensione topologica. In questo capitolo dimostriamo questo fatto nel caso particolare degli spazi metrici compatti; per una dimostrazione del caso generale si rimanda a [11], Teorema VII 2.

Teorema 2.1. *Sia (X, d) uno spazio metrico compatto. Allora*

$$\dim(X) \leq \dim_H(X).$$

Per la dimostrazione del Teorema 2.1 occorrono alcuni risultati preliminari.

Lemma 2.1. *Preso (X, d) uno spazio metrico, se per ogni ricoprimento aperto $(U_i)_{i=1}^{n+2}$ di X esiste un sottoricoprimento di X costituito da insiemi chiusi $(F_i)_{i=1}^{n+2}$ tali che $F_i \subseteq U_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+2\}$ e $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$, allora $\dim(X) \leq n$.*

Dimostrazione. Preso $\alpha = (U_i)_{i=1}^{n+2}$ un ricoprimento aperto di X , si consideri il sottoricoprimento $\mathcal{F} = (F_i)_{i=1}^{n+2}$ che soddisfa le ipotesi.

Da $\bigcap_{i=1}^{n+2} F_i = \emptyset$ segue che $F_1 \cap (\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i) = \emptyset$, cioè $F_1 \subseteq X \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i$. Poichè per ipotesi $F_1 \subseteq U_1$, si ha

$$F_1 \subseteq U_1 \cap \left(X \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \right),$$

dove quest'ultimo insieme è aperto perché è un'intersezione di aperti. Per la normalità dello spazio metrico (X, d) , esiste un insieme aperto B_1 tale che

$$F_1 \subseteq B_1 \subseteq \overline{B_1} \subseteq U_1 \cap \left(X \setminus \bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \right),$$

da cui segue che $B_1 \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \right) = \emptyset$.

Ora l'insieme $U_2 \cap \left(X \setminus \left(\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i \right) \right)$ è aperto e contiene F_2 , perché $F_2 \subseteq U_2$ e $\overline{B_1} \cap \left(\bigcap_{i=2}^{n+2} F_i \right) = F_2 \cap \left(\overline{B_1} \cap \left(\bigcap_{i=3}^{n+2} F_i \right) \right) = \emptyset$. Questo implica che esiste un insieme aperto B_2 tale che

$$F_2 \subseteq B_2 \subseteq \overline{B_2} \subseteq U_2 \cap \left(X \setminus \left(\overline{B_1} \cap \bigcap_{i=3}^{n+2} F_i \right) \right).$$

Procedendo analogamente, si costruisce una collezione di insiemi aperti $\beta = (B_i)_{i=1}^{n+2}$ tale che per ogni $k \in \{1, \dots, n+2\}$ si ha

$$\left(\bigcap_{i=1}^k \overline{B_i} \right) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n+2} F_i \right) = \emptyset.$$

Imponendo $k = n+2$ si ottiene che $\bigcap_{i=1}^{n+2} \overline{B_i} = \emptyset$, da cui segue che non esiste alcun punto $x \in X$ che appartenga a tutti gli $n+2$ insiemi. L'ordine di β in ogni $x \in X$ è quindi

$$\text{ord}_x(\beta) := -1 + \#\{i \in I : x \in B_i\} \leq -1 + (n+1) = n,$$

e cioè $\text{ord}(\beta) := \sup_{x \in X} \text{ord}_x(\beta) \leq n$.

Per costruzione $F_i \subseteq B_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+2\}$, e dunque

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+2} F_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{n+2} B_i,$$

cioè $\beta = (B_i)_i$ è un ricoprimento di X , che è più fine di α perché $B_i \subseteq U_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+2\}$.

Ricordando che $D(\alpha) := \min_{\gamma} \text{ord}(\gamma)$, dove i γ variano tra i ricoprimenti aperti finiti di X più fini di α , si ha che $D(\alpha) \leq \text{ord}(\beta) \leq n$. Infine, per l'arbitrarietà di α , si conclude che

$$\dim(X) := \sup_{\alpha} D(\alpha) \leq n. \quad \square$$

Definizione 2.1. Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici. Si dice che una funzione $f : X \rightarrow Y$ è θ -h lder, oppure di Hölder con esponente $\theta \in (0, 1]$, se esiste una costante $0 \leq C \leq \infty$ tale che

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq C \cdot d_X(x_1, x_2)^\theta \quad \text{per ogni } x_1, x_2 \in X.$$

Lemma 2.2. Sia $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ di Hölder con esponente $\theta \in (0, 1]$ e costante $C > 0$. Allora per ogni $s \geq 0$

$$\mathcal{H}^{s/\theta}(f(X)) \leq C^{s/\theta} \cdot \mathcal{H}^s(X). \quad (2.1)$$

Dimostrazione. Sia $(U_i)_{i=1}^\infty$ un δ -ricoprimento di X . Ricordando che $|\cdot|$ indica il diametro, poich  f   di Hölder di esponente $\theta \in (0, 1]$, vale

$$|f(U_i)| \leq C \cdot |U_i|^\theta,$$

cioè $(f(U_i))_{i=1}^\infty$ è un $C\delta^\theta$ -ricoprimento di $f(X)$.

Allora da

$$\sum_{i=1}^\infty |f(U_i)|^{s/\theta} \leq \sum_{i=1}^\infty (C \cdot |U_i|^\theta)^{s/\theta} = C^{s/\theta} \cdot \sum_{i=1}^\infty |U_i|^s$$

segue che

$$\mathcal{H}_{C\delta^\theta}^{s/\theta}(f(X)) \leq C^{s/\theta} \cdot \mathcal{H}_\delta^s(X),$$

e passando al limite per $\delta \rightarrow 0$ si dimostra (2.1). $\square$

Proposizione 2.1. *Se $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$ è di Hölder con esponente $\theta \in (0, 1]$ e di costante $C > 0$, allora*

$$\dim_H(f(X)) \leq \frac{\dim_H(X)}{\theta}.$$

Dimostrazione. Sia $s > \dim_H(X)$. Per il Lemma 2.2,

$$\mathcal{H}^{s/\theta}(f(X)) \leq C^{s/\theta} \cdot \mathcal{H}^s(X) = 0,$$

cioè $\dim_H(f(X)) \leq s/\theta$, da cui si conclude che

$$\dim_H(f(X)) \leq \inf_{s > \dim_H(X)} \frac{s}{\theta} = \frac{\dim_H(X)}{\theta}. \quad \square$$

Dimostrazione del Teorema 2.1. Sia $n = \dim(X)$. Poiché non vale che $\dim(X) \leq n - 1$, per il Lemma 2.1 esiste un ricoprimento aperto $(U_i)_{i=1}^{n+1}$ di X tale che, per ogni collezione di insiemi chiusi $(F_i)_{i=1}^{n+1}$ che ricopre X e tale che $F_i \subseteq U_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$, si ha $\bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$.

Per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$ si definisce la funzione

$$\delta_i : X \rightarrow [0, +\infty), \quad \delta_i(x) := \text{dist}(x, X \setminus U_i),$$

e poi si definisce

$$\delta : X \rightarrow [0, +\infty), \quad \delta(x) := \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i(x).$$

Preso $\varepsilon > 0$ e fissato $i \in \{1, \dots, n+1\}$, per ogni $x \in X$ esiste $z \in X \setminus U_i$ tale che $d(x, z) \leq \delta_i(x) + \varepsilon$. Allora, usando la disuguaglianza triangolare, e prendendo $y \in X$,

$$\delta_i(y) \leq d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) \leq d(y, x) + \delta_i(x) + \varepsilon,$$

e quindi, per l'arbitrarietà di ε ,

$$\delta_i(y) \leq \delta_i(x) + d(x, y).$$

Analogamente, si prova che

$$\delta_i(x) \leq d(x, y) + \delta_i(y),$$

ottenendo

$$|\delta_i(x) - \delta_i(y)| \leq d(x, y).$$

Di conseguenza ogni funzione δ_i è di Lipschitz, e quindi lo è anche δ :

$$|\delta(x) - \delta(y)| \leq (n+1) \cdot d(x, y).$$

Poiché $(U_i)_{i=1}^{n+1}$ è un ricoprimento aperto di X , per ogni $x \in X$ esiste almeno un indice i tale che $x \in U_i$, e quindi $\delta_i(x) > 0$. Segue che $\delta(x) > 0$ per ogni $x \in X$.

Siccome X è compatto e δ è continua, esistono due costanti $0 < a \leq b$ tali che $a \leq \delta(x) \leq b$ per ogni $x \in X$.

Si definisce ora l'applicazione

$$h : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, \quad x \mapsto \left(\frac{\delta_1(x)}{\delta(x)}, \frac{\delta_2(x)}{\delta(x)}, \dots, \frac{\delta_{n+1}(x)}{\delta(x)} \right).$$

Per ogni $j \in \{1, \dots, n+1\}$ si ha

$$\begin{aligned} \left| \frac{\delta_j(x)}{\delta(x)} - \frac{\delta_j(y)}{\delta(y)} \right| &= \left| \frac{\delta_j(x)\delta(y) - \delta_j(y)\delta(x)}{\delta(x)\delta(y)} \right| \\ &\leq \frac{1}{a^2} [\delta(y)|\delta_j(x) - \delta_j(y)| + \delta_j(y)|\delta(x) - \delta(y)|] \\ &\leq \frac{b(n+2)}{a^2} d(x, y). \end{aligned}$$

Indicando con $\|\cdot\|$ la norma euclidea in $\mathbb{R}^{n+1}$, segue che

$$\|h(x) - h(y)\| \leq \frac{b(n+2)\sqrt{n}}{a^2} \cdot d(x, y),$$

cioè h è una funzione di Lipschitz, e in particolare è di Hölder di esponente 1. Per la Proposizione 2.1, si ha

$$\dim_H(h(X)) \leq \dim_H(X).$$

La dimostrazione si conclude mostrando che $h(X)$ contiene il semplice

$$T := \left\{ (t_1, \dots, t_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i > 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n+1} t_i = 1 \right\},$$

il quale ha dimensione di Hausdorff $\dim_H(T) = n$. Se infatti $T \subseteq h(X)$, allora

$$\dim(X) = n = \dim_H(T) \leq \dim_H(h(X)) \leq \dim_H(X).$$

Sia ora $\underline{t} = (t_1, \dots, t_{n+1}) \in T$. Per ogni $i = 1, \dots, n+1$ si definisce il sottoinsieme

$$G_i = \left\{ x \in X \mid \frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} \geq t_i \right\}.$$

Ogni insieme G_i è chiuso, perché è la preimmagine dell'intervallo chiuso $[t_i, +\infty) \subset \mathbb{R}$ tramite la funzione continua $x \mapsto \frac{\delta_i(x)}{\delta(x)}$, ed è contenuto in U_i : per ogni $x \in G_i$, si ha $\frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} \geq t_i > 0$, e dunque $\delta_i(x) = \text{dist}(x, X \setminus U_i) > 0$, che è verificato se e solo se $x \in U_i$.

Inoltre, poichè per ogni $x \in X$ vale che

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} = 1,$$

si ha che $x \in G_i$ per qualche indice $i \in \{1, \dots, n+1\}$, da cui segue che $(G_i)_{i=1}^{n+1}$ è un ricoprimento di X .

Per il Lemma 2.1 si ha che $\bigcap_{i=1}^{n+1} G_i \neq \emptyset$, quindi esiste $x \in X$ tale che $\frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} \geq t_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+1\}$.

Ma poichè $\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} = 1 = \sum_{i=1}^{n+1} t_i$, deve necessariamente valere che

$$\frac{\delta_i(x)}{\delta(x)} = t_i \quad \text{per ogni } i \in \{1, \dots, n+1\},$$

cioè $h(x) = \underline{t}$. Si conclude pertanto che $T \subseteq h(X)$. □

La dimensione topologica può essere strettamente minore di quella metrica.

Esempio 2.1. Si associ alla retta reale $\mathbb{R}$ la distanza d definita da $d(x, y) = \sqrt{|x - y|}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$. Allora la dimensione topologica di $(\mathbb{R}, d)$ è $\dim(\mathbb{R}, d) = 1$, mentre la sua dimensione di Hausdorff è $\dim_H(\mathbb{R}, d) = 2$.

Si mostra innanzitutto che la topologia indotta dalla distanza d su $\mathbb{R}$ è la stessa della topologia euclidea standard.

Sia $B_d(x, r)$ la palla centrata in $x \in \mathbb{R}$ e di raggio r rispetto alla metrica d . Ricordando che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ la distanza euclidea è $d_E(x, y) = |x - y|$, si ha che

$$B_d(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : d(x, y) = \sqrt{|x - y|} < r\} = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r^2\} =: B_{d_E}(x, r^2),$$

e, viceversa,

$$B_{d_E}(x, r) := \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < r\} = \{y \in \mathbb{R} : \sqrt{|x - y|} < \sqrt{r}\} =: B_d(x, \sqrt{r}).$$

Da questo segue che le due collezioni di palle aperte, che rappresentano rispettivamente una base per la topologia di $(\mathbb{R}, d)$ e $(\mathbb{R}, d_E)$, coincidono.

Per l'Osservazione 1.2 si ha che la dimensione topologica di $(\mathbb{R}, d)$ è quindi uguale a quella di $(\mathbb{R}, d_E)$: $\dim(\mathbb{R}, d) = \dim(\mathbb{R}, d_E) = 1$.

Si prova ora che la dimensione di Hausdorff di $(\mathbb{R}, d)$ è $\dim_H(\mathbb{R}, d) = 2$.

Poiché $d(x, y) = \sqrt{|x - y|} = d_E(x, y)^{1/2}$, si osserva che il diametro di ogni sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}$ è $\text{diam}_d(U) = \sqrt{\text{diam}_{d_E}(U)}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^2(\mathbb{R}, d) &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}_d(U_i))^2 : \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \text{diam}_d(U_i) \leq \delta \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{diam}_{d_E}(U_i) : \mathbb{R} = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i, 0 < \text{diam}_{d_E}(U_i) \leq \delta^2 \right\} \\ &= \mathcal{H}_{\delta^2}^1(\mathbb{R}, d_E), \end{aligned}$$

da cui segue che

$$\mathcal{H}^2(\mathbb{R}, d) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^2(\mathbb{R}, d) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_{\delta^2}^1(\mathbb{R}, d_E).$$

Pertanto la misura di Hausdorff 2-dimensionale di $(\mathbb{R}, d)$ coincide con la misura di Hausdorff 1-dimensionale di $(\mathbb{R}, d_E)$, che è uguale a 1. Per la Proposizione 1.2, $0 < \mathcal{H}^2(\mathbb{R}, d) = 1 < +\infty$ implica che la dimensione di Hausdorff di $(\mathbb{R}, d)$ è $\dim_H(\mathbb{R}, d) = 2$.

In ogni spazio metrico (X, d) la dimensione di Hausdorff è minore o uguale alla dimensione di Assouad.

Proposizione 2.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico. Allora*

$$\dim_H(X) \leq \dim_A(X).$$

Dimostrazione. Fissato $x_0 \in X$, si ha che

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} (X \cap B(x_0, k)).$$

Per la proprietà *ii*) del Lemma 1.1, che implica che

$$\dim_H(X) = \sup_{k \geq 1} \dim_H(X \cap B(x_0, k)),$$

è sufficiente mostrare che per ogni $R > 0$ vale che

$$\dim_H(X \cap B(x_0, R)) \leq \dim_A(X).$$

Preso $s > \dim_A(X)$, si scelga λ tale che $\dim_A(X) < \lambda < s$ e si fissi $R > 0$. L'intersezione $X \cap B(x_0, R)$ può essere ricoperta da $N := N(X \cap B(x_0, R), r) \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^\lambda$ palle di raggio r , per

ogni $0 < r < R$ e per una qualche costante $C > 0$. Allora

$$\mathcal{H}_{2r}^s(X \cap B(x_0, R)) \leq \sum_{i=1}^N (2r)^s = N \cdot (2r)^s \leq C \left(\frac{R}{r}\right)^\lambda \cdot (2r)^s = C \cdot 2^s \cdot R^\lambda \cdot r^{s-\lambda}.$$

Passando al limite con $r \rightarrow 0$ si ottiene che $\mathcal{H}^s(X \cap B(x_0, R)) = 0$, e ponendo $s = \dim_A(X) + \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ arbitrario, si conclude

$$\dim_H(X \cap B(x_0, R)) \leq \dim_A(X). \quad \square$$

Esempio 2.2. Si consideri il sottoinsieme $F = \{0\} \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$, a cui è associata la distanza euclidea d_E .



Siccome F è numerabile, per il Lemma 1.1 la sua dimensione di Hausdorff è nulla: $\dim_H(F) = 0$.

Si prova ora che la dimensione di Assouad di F è massima, cioè $\dim_A(F) = 1$.

A tal scopo, è sufficiente trovare una costante $c > 0$, una sequenza di elementi $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in F e due successioni di raggi $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{R_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tali che

$$\frac{R_n}{r_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

e per i quali per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale che

$$N_{r_n}(B(x_n, R_n) \cap F) \geq c \cdot \frac{R_n}{r_n}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si pongano $x_n = 0$, $R_n = 1/n$ e $r_n = 1/n^2$. Allora

$$\frac{R_n}{r_n} = \frac{1/n}{1/n^2} = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

e, fissato $n \in \mathbb{N}$, si ha che per ogni $k \geq n$

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{n^2} = r_n,$$

cioè la distanza tra due punti consecutivi di F appartenenti all'intervallo $[0, R_n] = [0, \frac{1}{n}]$ è sempre minore di r_n . Segue la stima

$$N_{r_n}(B(0, R_n) \cap F) \geq \frac{n}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{R_n}{r_n},$$

cioè $\dim_A(F) \geq 1$. Poichè $F \subseteq \mathbb{R}$ e $\dim_A(\mathbb{R}, d_E) = 1$, la dimensione di Assouad di F è $\dim_A(F) = 1$.

Capitolo 3

Il teorema di immersione di Assouad

Preso uno spazio metrico (X, d) , una possibile domanda da porsi è se e sotto quali condizioni esista una applicazione che lo immerga in modo bi-Lipschitz in un opportuno spazio euclideo $\mathbb{R}^n$ dotato della distanza euclidea.

Si osserva innanzitutto che una tale immersione può esistere solo se lo spazio metrico (X, d) è omogeneo. Infatti, se per assurdo (X, d) non fosse omogeneo ma esistesse un'applicazione bi-Lipschitz

$$f : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

l'immagine di X tramite f sarebbe un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$, e dunque sarebbe omogenea. Siccome anche la funzione inversa f^{-1} sarebbe bi-Lipschitz, per il Lemma 1.4 (X, d) risulterebbe omogeneo, in contraddizione con l'ipotesi.

Il teorema di Assouad fornisce una risposta parziale alla domanda iniziale riguardo all'esistenza di una simile immersione. Esso afferma che associando ad X la metrica d^α , con $\alpha \in (0, 1)$, definita da

$$d^\alpha(x, y) = d(x, y)^\alpha \quad \text{per ogni } x, y \in X,$$

esiste sempre un'applicazione bi-Lipschitz che immerge (X, d^α) in uno spazio euclideo.

Teorema 3.1 (Assouad). *Sia (X, d) uno spazio metrico doubling e sia $\alpha \in (0, 1)$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ ed esiste*

$$f : (X, d^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

immersione bi-Lipschitz, dove $\mathbb{R}^n$ è dotato della distanza euclidea standard.

La dimostrazione si sviluppa attraverso la seguente costruzione. Fissato $\tau \in (0, 1)$ e preso $j \in \mathbb{Z}$,

si considerano lo spazio metrico $(X, d/\tau^j)$ e un suo sottoinsieme $Z_j \subset X$ tale che

$$d(x, y)/\tau^j \geq 1 \quad \text{per ogni } x, y \in Z_j, x \neq y,$$

e per il quale non esista nessun sottoinsieme di X con cardinalità maggiore che mantenga questa proprietà. Un tale sottoinsieme si dice *1-discreto massimale*.

Poi, si prova l'esistenza di una speciale funzione

$$k : Z_j \rightarrow \{1, \dots, m\},$$

per un opportuno $m \geq 1$, tramite la quale si costruisce un'immersione locale controllata

$$\varphi_j : (X, d/\tau^j) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Quindi si prende una base ortonormale $\{v_1, \dots, v_{2p}\}$ di $\mathbb{R}^{2p}$, dove $p \in \mathbb{N}$ è un numero sufficientemente grande, e la si estende per $2p$ -periodicità.

Fissato $\alpha \in (0, 1)$, tramite la successione di vettori $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ e la collezione di immersioni locali $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ si definisce l'immersione globale

$$f : X \rightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{2p}, \quad f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{\alpha j} \varphi_j(x) \otimes v_j.$$

Le stime (3.2) e (3.3) della Proposizione 3.1 riportata sotto garantiscono che la funzione f sia bi-Lipschitz rispetto alla metrica d^α .

Definizione 3.1. Sia (X, d) uno spazio metrico e siano $\tau \in (0, 1)$, $a, b, c > 0$. Un'applicazione

$$\varphi : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad m \geq 1,$$

si dice un'*immersione locale* (τ, a, b, c) -controllata se per ogni $x, y \in X$ valgono le seguenti proprietà:

i) se $\tau c < d(x, y) \leq c$, allora $|\varphi(x) - \varphi(y)| \geq a$;

ii) $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq b \min\{1, d(x, y)\}$.

Proposizione 3.1. Sia $p \in \mathbb{N}$ e sia $\{v_1, \dots, v_{2p}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^{2p}$, che viene estesa per $2p$ -periodicità ad una successione $(v_j)_{j \in \mathbb{Z}}$. Per ogni $j \in \mathbb{Z}$ sia

$$\varphi_j : (X, d/\tau^j) \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

un'immersione locale (τ, a, b, c) -controllata tale che $\varphi_j(x_0) = 0$ per un fissato $x_0 \in X$. Dato

$\alpha \in (0, 1)$, l'applicazione

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{2p}, \quad f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \tau^{\alpha j} \varphi_j(x) \otimes v_j \quad (3.1)$$

soddisfa

$$|f(x) - f(y)| \leq b \left(\frac{c^{-\alpha}}{1 - \tau^\alpha} + \frac{c^{1-\alpha}}{1 - \tau^{1-\alpha}} \right) \cdot d(x, y)^\alpha, \quad (3.2)$$

$$|f(x) - f(y)| \geq \left\{ ac^{-\alpha} - b \left(\frac{c^{-\alpha}}{1 - \tau^\alpha} \tau^{p\alpha} + \frac{c^{1-\alpha}}{1 - \tau^{1-\alpha}} \tau^{p(1-\alpha)} \right) \right\} \cdot d(x, y)^\alpha. \quad (3.3)$$

In particolare, per $p \in \mathbb{N}$ sufficientemente grande, l'applicazione

$$f : (X, d^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{2p}$$

è un'immersione bi-Lipschitz, dove a $\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{2p}$ è associata la distanza standard.

Dimostrazione. Dal momento che $f(x_0) = 0$, la convergenza della serie (3.1) è una conseguenza di (3.2). Siano $x, y \in X$ e si fissi $\ell \in \mathbb{Z}$ tale che

$$\tau^{\ell+1} < \frac{d(x, y)}{c} \leq \tau^\ell. \quad (3.4)$$

Posto $f_j(x) := \tau^{\alpha j} \varphi_j(x) \otimes v_j$ per ogni $x \in X$, per la proprietà (ii) della Definizione 3.1 si hanno le stime

$$\begin{aligned} |f_j(x) - f_j(y)| &\leq \tau^{\alpha j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\ &\leq b \tau^{\alpha j} \min\{1, \frac{d(x, y)}{\tau^j}\} \\ &\leq \begin{cases} b \tau^{\alpha j}, & j \geq \ell + 1, \\ b \tau^{j(\alpha-1)} d(x, y), & j \leq \ell, \end{cases} \end{aligned}$$

e dunque

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{j \geq \ell+1} |f_j(x) - f_j(y)| + \sum_{j \leq \ell} |f_j(x) - f_j(y)| \\ &\leq b \sum_{j \geq \ell+1} \tau^{\alpha j} + b d(x, y) \sum_{j \leq \ell} \tau^{j(1-\alpha)} \\ &= \frac{b \tau^{(\ell+1)\alpha}}{1 - \tau^\alpha} + \frac{b d(x, y) \tau^{\ell(\alpha-1)}}{1 - \tau^{1-\alpha}}. \end{aligned}$$

Ora la (3.2) segue dalla (3.4).

Si prova ora (3.3). Poichè $2p$ vettori successivi v_j sono ortogonali, per la proprietà (i) della Definizione 3.1, e tenuto conto di (3.4), si ha

$$\left| \sum_{-p < j - \ell \leq p} (f_j(x) - f_j(y)) \right| \geq |f_\ell(x) - f_\ell(y)| \geq \alpha \tau^{\ell\alpha},$$

e dunque

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\geq a\tau^{\ell\alpha} - \sum_{j>\ell+p} |f(x) - f(y)| - \sum_{j\leq\ell-p} |f(x) - f(y)| \\ &\geq a\tau^{\ell\alpha} - b \left(\frac{\tau^{(p+\ell+1)\alpha}}{1-\tau^\alpha} + \frac{\tau^{(\ell-p)(\alpha-1)}}{1-\tau^{1-\alpha}} d(x, y) \right). \end{aligned}$$

e usando (3.4) si trova la (3.3). $\square$

Lemma 3.1. *Sia (Z, d) uno spazio metrico, $\beta > 0$ un numero reale e $m \geq 2$ un intero. Se per ogni $z \in Z$ si ha*

$$\#\{x \in Z : d(x, z) \leq \beta\} \leq m,$$

allora esiste una funzione

$$k : Z \longrightarrow \{1, \dots, m\}$$

tale che $k(x) \neq k(z)$ se $0 < d(x, z) \leq \beta$.

Dimostrazione. L'insieme Z è al più numerabile e quindi può essere identificato con l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ (oppure con un suo sottoinsieme). Sia dunque $Z = \mathbb{N}$ e si definisca $Z_n := \{1, \dots, n\}$.

Inoltre, si supponga che k sia definita su Z_n , e si consideri

$$Y := \{k(z) : z \in Z_n, d(z, n+1) \leq \beta\} \subset \{1, \dots, m\}.$$

Siccome la condizione $d(z, n+1) \leq \beta$ è verificata da al più m elementi, di cui uno è $z = n+1$, segue che Y contiene al più $m-1$ elementi e quindi si può scegliere $q \in \{1, \dots, m\} \setminus Y$ e porre $k(n+1) = q$. Per induzione si definisce una funzione k su tutto Z . $\square$

Definizione 3.2. Si dice che uno spazio metrico (Z, d) è ε -discreto, con $\varepsilon > 0$, se

$$d(x, z) \geq \varepsilon \quad \text{per ogni } x, z \in Z \text{ con } x \neq z.$$

Lemma 3.2. *Sia (X, d) uno spazio metrico e sia $Z \subset X$ un sottoinsieme 1-discreto massimale. Siano $\beta > 8$ un numero reale, $m \geq 2$ un numero intero e sia*

$$k : Z \longrightarrow \{1, \dots, m\}$$

una funzione che verifica la tesi del Lemma 3.1. Allora la funzione

$$\varphi : (X, d) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \varphi(x) = \sum_{z \in Z} (2 - d(x, z))^+ e_{k(z)}$$

è un'immersione (τ, a, b, c) -controllata con

$$c = \beta - 4, \quad \tau = \frac{4}{c}, \quad a = \sqrt{2}, \quad b = 4m.$$

Dimostrazione. Fissato $x \in X$, si definisca la funzione

$$\Delta_x : Z \rightarrow [0, 2], \quad \Delta_x(z) := (2 - d(x, z))^+.$$

e si ponga

$$B_x := \{z \in Z : \Delta_x(z) \neq 0\} = \{z \in Z : d(x, z) < 2\}.$$

Se $x, y \in X$ sono due punti tali che $d(x, y) > 4$, allora $B_x \cap B_y = \emptyset$. Se inoltre $d(x, y) \leq \beta - 4$ allora la funzione

$$k : B_x \cup B_y \rightarrow \{1, \dots, m\}$$

è iniettiva. Infatti, se $z, w \in B_x \cup B_y$ allora $d(z, w) < \beta$.

Dunque

$$|\varphi(x) - \varphi(y)|^2 = \sum_{z \in B_x} \Delta_x(z)^2 + \sum_{w \in B_y} \Delta_y(w)^2.$$

Si osserva che, per la massimalità di Z , risulta $Z \cap B(x, 1) \neq \emptyset$ e $Z \cap B(y, 1) \neq \emptyset$ e quindi

$$\sum_{z \in B_x} \Delta_x(z)^2 + \sum_{w \in B_y} \Delta_y(w)^2 \geq 2.$$

Questo dimostra che vale la proprietà (i) della Definizione 3.1 con a, τ e c come nell'enunciato.

Si prova ora la proprietà (ii). Se $x, y \in X$ allora

$$|\Delta_x(z) - \Delta_y(z)| \leq 2 \min\{d(x, y), 1\}.$$

Se $\Delta_x(z) = \Delta_y(z) = 0$ la disuguaglianza è banale.

Nel caso in cui $\Delta_x(z) = 0$ e $\Delta_y(z) \neq 0$, si ha $d(x, z) \geq 2$, e quindi

$$|\Delta_x(z) - \Delta_y(z)| = \Delta_y(z) = 2 - d(y, z) \leq \begin{cases} 2, \\ d(x, z) - d(y, z) \leq d(x, y). \end{cases}$$

Il caso in cui $\Delta_y(z) = 0$ e $\Delta_x(z) \neq 0$ è analogo.

Se invece $\Delta_x(z) \neq 0$ e $\Delta_y(z) \neq 0$, si ha che $d(x, z) < 2$ e $d(y, z) < 2$. Quindi

$$|\Delta_x(z) - \Delta_y(z)| = |d(y, z) - d(x, z)| \leq \min\{2, d(x, y)\}.$$

Siccome k è iniettiva sia su B_x che su B_y , l'insieme $B_x \cup B_y$ contiene al più $2m$ elementi. Dunque

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \sum_{z \in B_x \cup B_y} |\Delta_x(z) - \Delta_y(z)| \leq 4m \min\{d(x, y), 1\}. \quad \square$$

Dimostrazione del Teorema 3.1. Sia (X, d) doubling di costante $N \in \mathbb{N}$, e si considerino un sottoinsieme 1-discreto $Z \subset X$ e un sottoinsieme $Y \subset X$ di diametro minore o uguale a $\eta > 0$.

Preso $k = \log_2(2\eta)$, siccome X è doubling, una palla di raggio η si può ricoprire con N^k palle di raggio $\frac{\eta}{2^k} = \frac{\eta}{2\eta} = \frac{1}{2}$. Segue che Y è contenuto in al più N^k palle di raggio minore o uguale a $1/2$. Siccome Z è 1-discreto, in ciascuna di queste palle può esserci al più un punto di Z , e pertanto $\#(Y \cap Z) \leq N^k$.

Da $k \leq \log_2(2\eta) + 1$ segue che

$$\begin{aligned} \#(Y \cap Z) &\leq N^{\log_2(2\eta)+1} = N \cdot N^{\log_2(2\eta)} = N(2\eta)^{\log_2 N} = \\ &= N \cdot 2^{\log_2 N} \cdot \eta^{\log_2 N} = N^2 \eta^{\log_2 N}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Si fissi ora $\tau \in (0, 1)$. Preso $j \in \mathbb{Z}$, si consideri $Z_j \subset X$ un sottoinsieme 1-discreto massimale di $(X, d/\tau^j)$. Per definizione, vale che $d(x, y)/\tau^j \geq 1$ per ogni $x, y \in Z_j$, $x \neq y$, cioè $d(x, y) \geq \tau^j$.

Posti $C = N^2$ e $s = \log_2 N$, si prendano $\beta > 0$ e $m \geq C \cdot (2\beta)^s$. Si fissi poi $z \in Z_j$ e si definisca

$$A := \{x \in Z_j : d(x, z)/\tau^j \leq \beta\} \subset Z_j,$$

che ha diametro minore o uguale a 2β rispetto alla distanza d/τ^j . Per la (3.5) vale che

$$\#A = \#(A \cap Z_j) \leq N^2 \cdot (2\beta)^{\log_2 N} = C(2\beta)^s \leq m.$$

Quindi per ogni $j \in \mathbb{Z}$ esiste

$$k : Z_j \longrightarrow \{1, \dots, m\}$$

che verifica la tesi del Lemma 3.1, e di conseguenza, per il Lemma 3.2, esistono

$$\varphi_j : (X, d/\tau^j) \longrightarrow \mathbb{R}^m, \quad \varphi_j(x) := \sum_{z \in Z_j} \left(2 - \frac{d(x, z)}{\tau^j}\right)^+ e_{k(z)}.$$

immersioni (τ, a, b, c) -controllate, con a, b, c come nell'enunciato. Inoltre, per linearità esiste un elemento $x_0 \in X$ tale che $\varphi_j(x_0) = 0$ per ogni $j \in \mathbb{Z}$.

Fissato $\alpha \in (0, 1)$, l'esistenza dell'immersione

$$f : (X, d^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^{2p}$$

è garantita dalla Proposizione 3.1. $\square$

Lista dei simboli

(X, d)	spazio metrico
(X, τ)	spazio topologico
$\text{ord}_x(\alpha)$	ordine di α nel punto x
$\text{ord}(\alpha)$	ordine di α
$\#A$	cardinalità di A
$\beta \succ \alpha$	β è più fine di α
$D(\alpha)$	$\min_{\beta \succ \alpha} \text{ord}(\beta)$
$\text{mesh}(\alpha)$	mesh di $\alpha = (A_i)_{i \in I}$: $\sup_{i \in I} A_i $
$\dim(X)$	dimensione topologica di X
$ Y = \text{diam}(Y)$	diametro di Y
$\text{diam}_d(Y)$	diametro di Y rispetto alla distanza d
$\mathcal{H}_\delta^s(A)$	premisura di Hausdorff di A
$\mathcal{H}^s(A)$	misura di Hausdorff s -dimensionale di A
$\dim_H(A)$	dimensione di Hausdorff di A
S^k	k -esima iterata della funzione S : $S^k = S \circ S^{k-1}$
$\text{Int}(A)$	interno di A
$B_d(x, r)$	palla centrata in x e di raggio r rispetto alla distanza d
$N(A, \rho)$	minimo numero di palle di raggio ρ necessarie per ricoprire A
$N_A(r, \rho)$	$\sup_{x \in A} N(B_d(x, r) \cap A, \rho)$
$\dim_A(C)$	dimensione di Assouad di C
$\ \cdot\ $	norma euclidea in $\mathbb{R}^{n+1}$

$\overline{F}$	chiusura di F
$(2 - d(x, y))^+$	parte positiva: $\max\{2 - d(x, y), 0\}$
e_m	m -esimo vettore della base canonica di $\mathbb{R}^n$
$x \otimes y$	prodotto tensoriale di $x \in \mathbb{R}^m$ e $y \in \mathbb{R}^{2p}$
$\mathbb{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbb{Z}$	insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbb{R}^n$	spazio euclideo n -dimensionale
$[-k, k]^n$	ipercubo in $\mathbb{R}^n$ di lato $2k$
$\text{dist}(x, A)$	distanza di x dall'insieme A : $\text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$
$d_E(x, y)$	distanza euclidea tra $x, y \in \mathbb{R}$: $d_E(x, y) = x - y $
d^α	distanza definita a partire dalla metrica d : $d^\alpha(x, y) = d(x, y)^\alpha$

Bibliografia

- [1] Patrice Assouad. “Étude d’une dimension métrique liée à la possibilité de plongements dans $\mathbb{R}^n$ ”. In: *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* 288.15 (1979), pp. 731–734.
- [2] Patrice Assouad. “Plongements lipschitziens dans $\mathbb{R}^n$ ”. In: *Bulletin de la S. M. F.* 111 (1983), pp. 429–448.
- [3] Georges Bouligand. “Ensembles impropres et nombre dimensionnel”. In: *Bulletin des Sciences Mathématiques* 52 (1928), pp. 320–344.
- [4] Michel Coornaert. *Topological Dimension and Dynamical Systems*. Springer, 2015.
- [5] Gerald A. Edgar. *Measure, Topology and Fractal Geometry*. Springer, 2008.
- [6] Ryszard Engelking. *Dimension Theory*. Vol. 19. North-Holland Mathematical Library. PWN, 1978.
- [7] Kenneth Falconer. *Fractal Geometry, Mathematical Foundations and Applications*. Wiley, 2014.
- [8] Jonathan M. Fraser. *Assouad Dimension and Fractal Geometry*. Cambridge University Press, 2020.
- [9] Felix Hausdorff. “Dimension und äußeres Maß”. In: *Mathematische Annalen* 79 (1919), pp. 157–179.
- [10] Juha Heinonen. *Lectures on Analysis on Metric Spaces*. Springer, 2001.
- [11] Witold Hurewicz e Henry Wallman. *Dimension Theory*. Princeton Legacy Library, 1941.
- [12] Juha Lehtbäck. “Assouad Type Dimensions in Geometric Analysis”. In: *Fractal Geometry and Stochastics VI*. Vol. 76. Progress in Probability. Cham: Birkhäuser, 2021.
- [13] Jouni Luukkainen. “Assouad dimension: antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures”. In: *Journal of the Korean Mathematical Society* 35 (1998), pp. 23–76.
- [14] James C. Robinson. *Dimensions, Embeddings and Attractors*. Cambridge University Press, 2010.