



**Università degli Studi di Padova**

---

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA 'TULLIO LEVI-CIVITA'

Corso di Laurea in Matematica

TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Un esempio di  $\Gamma$ -convergenza:  
il Teorema di Modica-Mortola**

Candidato:

**Francesco Cocco**

Matricola 2009874

Relatore:

**Prof.**

**Roberto Monti**

---

Anno Accademico 2022-2023

22 settembre 2023



# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>iii</b>
<b>1 Spazi di Sobolev e funzioni BV</b>	<b>1</b>
1.1 Derivate deboli e spazi di Sobolev . . . . .	1
1.2 Funzioni BV . . . . .	2
1.2.1 Definizione e prime proprietà . . . . .	2
1.2.2 Semicontinuità inferiore . . . . .	5
1.2.3 Approssimazione di funzioni BV . . . . .	6
<b>2 <math>\Gamma</math>-convergenza: definizione e prime proprietà</b>	<b>11</b>
2.1 Definizione e primi esempi . . . . .	11
2.2 $\Gamma$ -convergenza in spazi metrici . . . . .	12
<b>3 Il Teorema di Modica-Mortola</b>	<b>17</b>
3.1 Un esempio applicativo . . . . .	17
3.2 Enunciato . . . . .	18
3.3 Dimostrazione . . . . .	20
3.3.1 Il caso 1-dimensionale . . . . .	20
3.3.2 Il caso generale . . . . .	24
3.4 Il caso vettoriale . . . . .	27
<b>Bibliografia</b>	<b>29</b>



# Introduzione

Il Teorema di Modica-Mortola è un importante risultato nell'ambito del calcolo delle variazioni, formulato e dimostrato per la prima volta dai matematici Luciano Modica e Stefano Mortola nel 1977. Nel corso degli anni, sono state trovate numerose applicazioni per questo Teorema, in particolare nell'ambito dello studio delle transizioni di fase. In questa tesi, forniremo dapprima gli strumenti teorici necessari alla comprensione del suo enunciato, per poi concentrarci sulla sua dimostrazione.

In particolare, nel primo capitolo introdurremo i concetti di derivata debole e di spazio di Sobolev, assieme alla nozione di funzione a variazione limitata (abbreviato in  $BV$ , *bounded variation*), andando poi a definire gli insiemi di perimetro finito e la frontiera in misura  $Su$ . In seguito, proveremo che ad ogni funzione  $BV$  è possibile associare un'opportuna misura, e dimostreremo che la funzione caratteristica di un insieme di perimetro finito è approssimata dalle funzioni caratteristiche di insiemi con perimetro finito e frontiera liscia.

Nel secondo capitolo passeremo a studiare la nozione di  $\Gamma$ -convergenza; forniremo inizialmente la definizione topologica corredata da alcuni esempi, per poi concentrarci sullo studio della  $\Gamma$ -convergenza in spazi metrici. Il risultato più importante in questo capitolo è sicuramente il Teorema 2.2.3, che ci fornirà un importante strumento per lo studio dei funzionali coinvolti nel Teorema di Modica-Mortola e dei loro minimi.

Infine, nel terzo ed ultimo capitolo verrà dato l'enunciato del Teorema di Modica-Mortola, che studia la  $\Gamma$ -convergenza per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  dei funzionali:

$$F_\varepsilon(u) = \int_{\Omega} \left\{ \varepsilon |\nabla(u)|^2 + \frac{1}{\varepsilon} W(u) \right\} dx$$

al funzionale

$$F(u) = \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su),$$

entrambi definiti su  $L^1(\Omega)$  in modo opportuno. Forniremo una dimostrazione nei casi 1,2-dimensionale, utilizzando le nozioni ed i risultati visti nei capitoli

---

precedenti. Per una maggiore comprensione di tale risultato, analizzeremo una situazione fisica modello: la separazione, all'interno di un contenitore rigido, di due fluidi immiscibili. Il Teorema di Modica-Mortola fornirà un'previsione di quanto accade nella realtà fisica: i due liquidi si separeranno in modo da minimizzare l'area della superficie di interfaccia tra di essi. Concluderemo quindi con una breve analisi del caso in cui si miscelino più di due fluidi.

# Capitolo 1

## Spazi di Sobolev e funzioni BV

### 1.1 Derivate deboli e spazi di Sobolev

La nozione di derivata debole risulta di fondamentale importanza per la definizione degli spazi di Sobolev, strutture che verranno utilizzate nella formulazione del teorema di Modica-Mortola. In questo capitolo, faremo riferimento a [EG92] e [JL98]

**Definizione 1.1.1** (Derivata parziale debole). Sia  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$ ,  $1 \leq i \leq n$  con  $U$  insieme aperto,  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $g_i \in L^1_{\text{loc}}(U)$  è la derivata parziale debole di  $f$  rispetto a  $x_i$  in  $U$  se

$$\int_U f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_U g_i \varphi dx$$

per ogni  $\varphi \in C_c^1(U)$ .

La derivata parziale debole rispetto alle coordinate  $x_i$ , se esiste, è definita unicamente  $\mathcal{L}^n$ -q.o. Scriviamo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

e

$$Df := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

nel caso in cui le derivate parziali deboli esistano. Un'altra possibile notazione per indicare il gradiente debole è

$$\nabla f := \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Passiamo ora a definire gli spazi di Sobolev.

**Definizione 1.1.2** (Spazio di Sobolev). Sia  $1 \leq p \leq \infty$ .

1. La funzione  $f$  appartiene allo spazio di Sobolev  $W^{1,p}(U)$  se  $f \in L^p(U)$  e le derivate parziali deboli  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  esistono e appartengono  $L^p(U)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
2. La funzione  $f$  appartiene a  $W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$  se  $f \in W^{1,p}(V)$  per ogni insieme aperto  $V \subset\subset U$ .
3. Diremo che  $f$  è una funzione di Sobolev se  $f \in W_{\text{loc}}^{1,p}(U)$  per qualche  $1 \leq p \leq \infty$ .

Se  $f \in W^{1,p}(U)$ , possiamo definire

$$\|f\|_{W^{1,p}(U)} := \left( \int_U |f|^p + |Df|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

per  $1 \leq p < \infty$ , e

$$\|f\|_{W^{1,\infty}(U)} := \text{ess sup}_U (|f| + |Df|)$$

La coppia  $(W^{1,p}(U), \|\cdot\|_{W^{1,\infty}(U)})$ , con  $1 \leq p \leq \infty$  e con l'identificazione delle funzioni che coincidono q.o. in  $U$ , è uno spazio di Banach.

**Esempio 1.1.1.** Sia  $\Omega = (-1, 1) \subset \mathbb{R}$ ,  $u(x) := |x|$ . Mostriamo che  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  per  $1 \leq p \leq \infty$ . A tale scopo, è sufficiente verificare che la derivata debole di  $u$  è data da

$$Du(x) = v(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Infatti, abbiamo per  $\varphi \in C_c^1((-1, 1))$

$$\int_{-1}^1 \varphi(x) v(x) dx = \int_{-1}^1 \varphi'(x) |x| dx.$$

## 1.2 Funzioni BV

### 1.2.1 Definizione e prime proprietà

Denoteremo con  $U$  un sottoinsieme aperto di  $\mathbb{R}^n$ .

**Definizione 1.2.1** (Funzione a variazione limitata e spazio BV). Una funzione  $f \in L^1(U)$  ha variazione limitata in  $U$  se

$$\sup \left\{ \int_U f \operatorname{div} \varphi dx \mid \varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Indicheremo con  $BV(U)$  lo spazio delle funzioni a variazione limitata.

In particolare, diremo che un sottoinsieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha perimetro finito in  $U$  se  $\chi_E \in BV(U)$ .

Esiste un corrispettivo locale per queste classi di funzioni.

**Definizione 1.2.2** (Funzione  $BV_{\text{loc}}$ ). Una funzione  $f \in L^1_{\text{loc}}(U)$  ha variazione locale limitata in  $U$  se per ogni sottoinsieme aperto  $V \subset\subset U$ ,

$$\sup \left\{ \int_V f \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\} < \infty.$$

Denoteremo con  $BV_{\text{loc}}(U)$  lo spazio di tali funzioni.

In modo analogo a quanto fatto nel caso generale, un insieme  $\mathcal{L}^n$ -misurabile  $E \subset \mathbb{R}^n$  ha perimetro localmente finito in  $U$  se  $\chi_E \in BV_{\text{loc}}(U)$ .

A ogni funzione  $BV$  può essere associata una particolare misura.

**Definizione 1.2.3** (Misura di Radon). Una misura esterna  $\mu$  definita su  $\mathbb{R}^n$  si definisce di Radon se valgono le seguenti proprietà:

1.  $\mu$  è una misura Boreliana, ovvero ogni insieme facente parte della  $\sigma$ -algebra dei boreliani è  $\mu$ -misurabile;
2.  $\mu$  è regolare sui Boreliani, ovvero per ogni  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  esiste un insieme di Borel  $B$  tale che  $A \subseteq B$  e  $\mu(A) = \mu(B)$ ;
3. Per ogni sottoinsieme compatto  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  vale  $\mu(K) < \infty$ .

**Teorema 1.2.1** (di rappresentazione di Riesz). Sia  $L : C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}$  un funzionale lineare che soddisfi

$$\sup \{L(f) \mid f \in C_c(U; \mathbb{R}^n), |f| \leq 1, \operatorname{spt}(f) \subset K\} < \infty$$

per ogni insieme compatto  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Allora esistono una misura di Radon  $\mu$  su  $\mathbb{R}^n$  e una funzione  $\mu$ -misurabile  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tali che

1.  $|\sigma(x)| = 1$  per  $\mu$ -q.o.  $x$
2.  $L(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \sigma d\mu$  per ogni  $f \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$

*Dimostrazione.* Si veda [EG92] sezione 1.9 □

**Teorema 1.2.2** (di struttura per le funzioni  $BV_{\text{loc}}$ ). Sia  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ . Allora esiste una misura di Radon  $\mu$  su  $U$  e una funzione  $\mu$ -misurabile  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che:

1.  $|\sigma(x)| = 1$   $\mu$ -q.o.
2.  $\int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_U \varphi \sigma d\mu$  per ogni  $\varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ .

*Dimostrazione.* Definiamo il funzionale lineare  $L : C_c^1(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  come

$$L(\varphi) := - \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx$$

per  $\varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ . Poichè  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , abbiamo

$$\sup \{L(\varphi) \mid \varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1\} := C(V) < \infty$$

per ogni sottoinsieme aperto  $V \subset\subset U$ , dunque

$$|L(\varphi)| \leq C(V) \|\varphi\|_{L^\infty} \quad (1.1)$$

per  $\varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$ . Si fissi un sottoinsieme compatto  $K \subset U$ , e si scelga quindi un insieme aperto  $V$  tale che  $K \subset V \subset U$ . Per ogni  $\varphi \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$  con  $\operatorname{spt} \varphi \subset K$ , consideriamo  $\varphi_k \in C_c^1(V; \mathbb{R}^n)$   $k \in \mathbb{N}$  in modo tale che  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  uniformemente su  $V$ . Definiamo

$$\bar{L}(\varphi) := \lim_{k \rightarrow \infty} L(\varphi_k). \quad (1.2)$$

In virtù di (1.1) questo limite esiste: infatti,  $\forall k, m \in \mathbb{N}$ , vale

$$\begin{aligned} |L(\varphi_{k+m}) - L(\varphi_k)| &= |L(\varphi_{k+m} - \varphi_k)| \\ &\leq C(V) \|\varphi_{k+m} - \varphi_k\|_\infty \quad \text{per (1.1)} \end{aligned}$$

e poichè per ipotesi  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  uniformemente su  $V$ ,  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di Cauchy in  $\|\cdot\|_\infty$ , dunque anche  $\{L(\varphi_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$  è di Cauchy in  $\mathbb{R}$ . Inoltre, il limite (1.2) è indipendente dalla scelta della successione  $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  convergente a  $\varphi$ . Di conseguenza,  $L$  si può estendere univocamente ad un funzionale lineare  $\bar{L} : C_c(U; \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  ed inoltre

$$\sup \{\bar{L}(\varphi) \mid \varphi \in C_c(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1, \operatorname{spt}(\varphi) \subset K\} := C(K) < \infty$$

per ogni sottoinsieme compatto  $K \subset U$ . Il teorema di rappresentazione di Riesz, ci permette di concludere.  $\square$

Se  $f \in BV_{\text{loc}}(U)$ , scriveremo  $\|Df\|$  per la misura  $\mu$ . In particolare, se  $f = \chi_E$  ed  $E$  è un insieme di perimetro localmente finito in  $U$ , denoteremo con  $\|\partial E\|$  la misura  $\mu$ .

Introduciamo ora la nozione di *frontiera in misura*:

**Definizione 1.2.4** (Frontiera in misura). Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme con perimetro localmente finito. La frontiera in misura  $\partial_* E$  è l'insieme degli elementi  $x \in \mathbb{R}^n$  per cui valgono le seguenti disuguaglianze:

- $\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r) \cap E)}{r^n} > 0;$
- $\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x,r)/E)}{r^n} > 0.$

*OSSERVAZIONE.* Nel caso di insiemi a perimetro localmente finito  $E$ , la frontiera in misura  $\partial_* E$  possiede un'importante proprietà: la misura variazione totale  $\|\partial E\|$  coincide con  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E)$ , dove  $\mathcal{H}^{n-1}$  è la misura di Hausdorff  $n-1$  dimensionale (si veda [EG92], sezione 5.8).

### 1.2.2 Semicontinuità inferiore

Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e consideriamo il sistema degli intorni di un punto  $x \in X$ :

$$\mathcal{N}(x) := \{\mathcal{U} \subseteq X; \mathcal{U} \text{ intorno di } x\} \quad x \in X.$$

**Definizione 1.2.5** (Funzione semicontinua inferiormente). Una funzione  $F : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  è semicontinua inferiormente su  $X$  (sci) se per ogni  $x \in X$  si ha:

$$F(x) \leq \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in \mathcal{U}} F(y)$$

*OSSERVAZIONE.* Equivale a chiedere  $F(x) = \sup_{\mathcal{U} \in \mathcal{N}(x)} \inf_{y \in \mathcal{U}} F(y)$ .

**Proposizione 1.2.1.** Siano  $X$  uno spazio metrico ed  $F: X \rightarrow (-\infty, \infty]$  una funzione tale che  $\forall x \in X$  e  $\forall x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x$  si ha:

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Allora la funzione  $F$  è sci.

*Dimostrazione.* Essendo  $X$  uno spazio metrico, possiamo considerare come base di intorni l'insieme delle palle aperte di centro  $x$  e raggio  $r > 0$ :

$$\mathcal{B}(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

A questo punto, basta ricordare la definizione di limite inferiore per una funzione  $F$  in uno spazio metrico:

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}^m \geq n} \inf F(x_n)$$

e si conclude. □

**Esempio 1.2.1** (Semicontinuità inferiore della variazione totale). Siano  $f_k, f \in BV(U)$   $k \in \mathbb{N}$  e  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1_{loc}(U)$ . Allora:

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \|Df_h\|(U).$$

Ovvero, la funzione variazione totale è semicontinua inferiormente. Infatti, considerando  $\varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\varphi| \leq 1$ , vale

$$\begin{aligned} \int_U f \operatorname{div} \varphi \, dx &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U f_k \operatorname{div} \varphi \, dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow \infty} \int_U \varphi \cdot \sigma_k \, d\|Df_k\| \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U), \end{aligned}$$

e di conseguenza

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \|Df_k\|(U).$$

### 1.2.3 Approssimazione di funzioni BV

Dato un insieme aperto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , l'insieme  $C^\infty(U)$  è denso in  $BV(U)$ , rispetto alla topologia di  $L^1(U)$ . Ricordiamo che con  $U(x, r)$  indichiamo la palla aperta in  $\mathbb{R}^n$  di centro  $x$  e raggio  $r$ .

**Teorema 1.2.3** (Approssimazione locale tramite funzioni  $C^\infty$ ). *Sia  $f \in BV(U)$ . Esiste una successione  $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset BV(U) \cap C^\infty(U)$  tale che:*

1.  $f_k \rightarrow f$  in  $L^1(U)$ ;
2.  $\|Df_k\|(U) \rightarrow \|Df\|(U)$  per  $k \rightarrow \infty$ .

*Dimostrazione. Passo 1:* Si fissi  $\varepsilon > 0$ . Dato un intero positivo  $m$ , si definiscano gli insiemi aperti:

$$U_k = \left\{ x \in U : \operatorname{dist}(x, \partial U) > \frac{1}{m+k} \right\} \cap U(0, k+m) \quad k \in \mathbb{N}$$

e si scelga quindi  $m$  in modo da far valere la disuguaglianza:

$$\|Df\|(U - U_1) < \varepsilon \tag{1.3}$$

Si ponga quindi  $U_0 = \emptyset$  e si definisca

$$V_k = U_{k+1} - \bar{U}_{k-1}$$

Sia  $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$  una successione di funzioni lisce tali che

$$\begin{cases} \zeta_k \in C^\infty(V_k), & 0 \leq \zeta_k \leq 1, & k \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=1}^\infty \zeta_k = 1 & \text{in } U. \end{cases}$$

Consideriamo la funzione  $C^\infty$   $\eta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  come segue:

$$\eta(x) = \begin{cases} c \exp\left(\frac{1}{|x|^2 - 1}\right) & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

con la costante  $c$  scelta in modo da verificare

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(x) dx = 1$$

Definiamo il *mollificatore standard*  $\eta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} \eta\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ , con  $\varepsilon > 0, x \in \mathbb{R}^n$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , scegliamo  $\varepsilon_k > 0$  in modo tale che valgano

$$\begin{cases} \text{spt}(\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k)) \subset V_k \\ \int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k| dx < \frac{\varepsilon}{2^k} \\ \int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f D\zeta_k) - f D\zeta_k| dx < \frac{\varepsilon}{2^k}. \end{cases} \quad (1.4)$$

Poniamo

$$f_\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\varepsilon_k} * \zeta_k.$$

In qualche intorno di ciascun punto  $x \in U$  ci sono solo un numero finito di termini non nulli nella somma appena descritta, dunque  $f_\varepsilon \in C^\infty(U)$ .

**Passo 2:** Poichè vale  $f = \sum_{k=1}^{\infty} f \zeta_k$ , (1.4) implica:

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L^1(U)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_U |\eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) - f \zeta_k| dx < \varepsilon.$$

Di conseguenza,

$$f_\varepsilon \rightarrow f \text{ in } L^1(U) \text{ per } \varepsilon \rightarrow 0.$$

**Passo 3:** Sappiamo che

$$\|Df\|(U) \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Df_\varepsilon\|(U). \quad (1.5)$$

**Passo 4:** Sia ora  $\varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n)$ ,  $|\varphi| \leq 1$ . Allora

$$\begin{aligned}
 \int_U f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \eta_{\varepsilon_k} * (f \zeta_k) \operatorname{div} \varphi \, dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \zeta_k \operatorname{div}(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) \, dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \, dx \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f D\zeta_k \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) \, dx \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \, dx \\
 &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \int_U \varphi \cdot (\eta_{\varepsilon_k} * (f D\zeta_k) - f D\zeta_k) \, dx \\
 &= I_1^\varepsilon + I_2^\varepsilon.
 \end{aligned}$$

Ora,  $|\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)| \leq 1$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , e ogni punto in  $U$  appartiene al massimo a tre insiemi della famiglia  $\{V_k\}_{k=1}^{\infty}$ . Dunque

$$\begin{aligned}
 |I_1^\varepsilon| &= \left| \int_U f \operatorname{div}(\zeta_1(\eta_{\varepsilon_1} * \varphi)) \, dx + \sum_{k=2}^{\infty} \int_U f \operatorname{div}(\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)) \, dx \right| \\
 &\leq \|Df\|(U) + \sum_{k=2}^{\infty} \|Df\|(V_k) \\
 &\leq \|Df\|(U) + 3\|Df\|(U - U_1) \\
 &\leq \|Df\|(U) + 3\varepsilon, \quad \text{per (1.3).}
 \end{aligned}$$

D'altra parte, (1.4) implica

$$|I_2^\varepsilon| < \varepsilon.$$

Di conseguenza

$$\int_U f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \, dx \leq \|Df\|(U) + 4\varepsilon$$

e quindi

$$\|Df_\varepsilon\|(U) \leq \|Df\|(U) + 4\varepsilon.$$

La stima (1.5) completa la dimostrazione.  $\square$

Richiamiamo ora una breve estensione di questo risultato, che ci tornerà utile quando dovremo dimostrare il teorema di Modica-Mortola. Diamo prima alcuni concetti preliminari.

**Definizione 1.2.6** (Perimetro di un insieme). Sia  $E \subset \mathbb{R}^n$  un insieme  $\mathcal{L}^n$ . Per ogni sottoinsieme  $U \subset \mathbb{R}^n$  il perimetro di  $E$  in  $U$ , denotato con  $P(E, U)$ , è la variazione di  $\chi_E$  in  $U$ , ovvero

$$P(E, U) = \sup \left\{ \int_E f \operatorname{div} \varphi \, dx \mid \varphi \in C_c^1(U; \mathbb{R}^n), |\varphi| \leq 1 \right\}.$$

Se  $P(E, U) < \infty$ , diremo che  $E$  è un insieme di perimetro finito.

**Teorema 1.2.4** (Formula di coarea per funzioni BV). Sia  $f \in BV(U)$  e definiamo gli insiemi di livello:

$$E_t = \{x \in U : f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

Allora, vale:

1.  $E_t$  ha perimetro finito  $\mathcal{L}^1 - q.o. t \in \mathbb{R}$ .
2.  $\|Df\|(U) = \int_{-\infty}^{\infty} \|\partial E_t\|(U) dt$ .

*Dimostrazione.* Si veda [EG92], sezione 5.5 □

Possiamo ora provare un'importante estensione del teorema di approssimazione delle funzioni BV. Nel teorema che segue, supporremo che  $E$  sia un insieme con misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale finita. Inoltre, ricordiamo che una successione di funzioni  $(f_h)_{h \in \mathbb{N}}$  a valori in  $\mathbb{R}$  converge in misura ad una funzione  $f$  a valori in  $\mathbb{R}$  se vale la seguente condizione:

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : |f_h(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

**Teorema 1.2.5** (Densità degli insiemi lisci). Sia  $E$  un insieme a perimetro finito in  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ . Allora, esiste una successione  $(E_h)$  di insiemi aperti con frontiere lisce (come sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ ) convergente in misura ad  $E$  e tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} P(E_h, \mathbb{R}^n) = P(E, \mathbb{R}^n).$$

*Dimostrazione.* Sia  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset (0, \infty)$  una successione infinitesima; poichè  $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$ , per il Teorema 1.2.3, sappiamo che esiste una successione di funzioni  $u_k \in BV(E) \cap C^\infty(E)$  convergente a  $\chi_E$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  e che soddisfa:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|Du_k\|(\mathbb{R}^n) = \|\partial E\|(\mathbb{R}^n) = P(E, \mathbb{R}^n).$$

Consideriamo gli insiemi  $F_t^k = \{u_k > t\}$ . Applicando la formula di coarea, troviamo

$$\begin{aligned} P(E, \mathbb{R}^n) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \|Du_k\|(\mathbb{R}^n) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 P(F_t^k, \mathbb{R}^n) dt \\ &\geq \int_0^1 \liminf_{k \rightarrow \infty} P(F_t^k, \mathbb{R}^n) dt. \end{aligned}$$

Per il teorema di Sard (si veda [Mil97]) sappiamo che per ogni funzione  $u_k$ , l'insieme dei valori critici ha misura nulla, dunque per  $\mathcal{L}^1$ -q.o.  $t \in (0, 1)$  tutti gli insiemi  $F_t^k$  hanno una frontiera liscia (come sottovarietà di  $\mathbb{R}^n$ ); possiamo quindi scegliere  $t \in (0, 1)$  in modo tale che

$$L := \liminf_{k \rightarrow \infty} P(F_t^k, \mathbb{R}^n) \leq P(E, \mathbb{R}^n).$$

Sia  $(E_h) = (F_t^{k(h)})$  una sottosuccessione tale che il perimetro  $P(E_h, \mathbb{R}^n)$  converga ad  $L$ . Grazie alla disuguaglianza di Chebychev possiamo affermare che

$$\begin{aligned} |E_h/E| &\leq \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{k(h)} - \chi_E| dx, \\ |E/E_h| &\leq \frac{1}{1-t} \int_{\mathbb{R}^n} |u_{k(h)} - \chi_E| dx. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $(E_h)$  converge ad  $E$  in misura. La semicontinuità inferiore dei perimetri implica che  $L \geq P(E, \mathbb{R}^n)$ , quindi  $L = P(E, \mathbb{R}^n)$  e si conclude.  $\square$

## Capitolo 2

# $\Gamma$ -convergenza: definizione e prime proprietà

### 2.1 Definizione e primi esempi

Introduciamo ora la nozione di  $\Gamma$ -convergenza, di fondamentale importanza per la formulazione del teorema di Modica-Mortola. Forniremo prima una definizione più generale, utile per comprenderne la differenza rispetto all'usuale nozione di convergenza puntuale. Passeremo poi ad una descrizione di tipo sequenziale, valida nel caso degli spazi metrici. Il riferimento di questo capitolo è [Mas93].

**Definizione 2.1.1** ( $\Gamma$ -limite). Siano  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $F_h : X \rightarrow (-\infty, \infty]$ ,  $h \in \mathbb{N}$ . Definiamo le funzioni  $F^+, F^- : X \rightarrow [-\infty, \infty]$

$$F^-(x) = \Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y),$$

$$F^+(x) = \Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \sup_{U \in \mathcal{N}(x)} \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y).$$

Se  $F^- = F^+ = F$  diremo che esiste il  $\Gamma$ -limite

$$F(x) = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = F^-(x) = F^+(x), \quad x \in X.$$

**Esempio 2.1.1.** Sia  $F_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  la successione definita nel seguente modo:

$$F_h(x) = h x e^{-2h^2 x^2}.$$

Allora,  $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge in  $\mathbb{R}$  alla funzione

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$

Ma  $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a 0.

**Esempio 2.1.2.** Consideriamo le funzioni  $F_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in \mathbb{N}$  definite nel seguente modo:

$$F_h(x) = \begin{cases} hxe^{-2h^2x^2} & \text{se } h \text{ è pari} \\ 2hxe^{-2h^2x^2} & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Allora,  $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$  converge puntualmente a 0 ma  $F_h$  non  $\Gamma$ -converge in  $\mathbb{R}$ . Infatti

$$\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \begin{cases} -e^{-\frac{1}{2}} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$

d'altra parte

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0, \end{cases}$$

poichè i due limiti differiscono, non abbiamo  $\Gamma$ -convergenza.

Questi due esempi mostrano come la  $\Gamma$ -convergenza sia una nozione fondamentale indipendente da quella di convergenza puntuale.

## 2.2 $\Gamma$ -convergenza in spazi metrici

Restringendoci agli spazi metrici, possiamo dare una caratterizzazione della  $\Gamma$ -convergenza di tipo sequenziale.

**Teorema 2.2.1** (Caratterizzazione sequenziale della  $\Gamma$ -convergenza). *Siano  $(X, \tau)$  uno spazio metrico,  $F, F_h : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  con  $h \in \mathbb{N}$ . Allora  $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$   $\Gamma$ -converge a  $F$  se vale:*

- $\forall x \in X$  e  $\forall x_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} x$ :  $F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h)$ ;
- $\forall x \in X$   $\exists x_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} x$ :  $F(x) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h)$ .

*Dimostrazione.* Proviamo le seguenti affermazioni:

- $\forall x \in X$  e per ogni successione  $(x_h)$  convergente a  $x$  in  $X$  vale:

$$\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h); \quad (2.1)$$

- $\forall x \in X$  e per ogni successione  $(x_h)$  convergente a  $x$  in  $X$  vale:

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) \leq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h). \quad (2.2)$$

CAPITOLO 2.  $\Gamma$ -CONVERGENZA: DEFINIZIONE E PRIME  
PROPRIETÀ

---

Sia  $(x_h)$  una successione convergente a  $x$  in  $X$  e sia  $U \in \mathcal{N}(x)$ . Allora esiste  $k \in \mathbb{N}$  tale che  $x_h \in U$  per ogni  $h \geq k$ , quindi  $\inf_{y \in U} F_h(y) \leq F_h(x_h)$  per ogni  $h \geq k$ . Questo implica che:

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y) &\leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) \\ \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U} F_h(y) &\leq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) \end{aligned}$$

per ogni  $U \in \mathcal{N}(x)$ , da cui seguono (2.1) e (2.2). Proviamo ora la condizione

$\forall x \in X$  esiste una successione  $(x_h)$  convergente ad  $x$  in  $X$  tale che:

$$\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) \quad (2.3)$$

Fissiamo  $x \in X$  tale che  $\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) < +\infty$ . Sia  $(U_k)$  una base numerabile per il sistema di intorni di  $x$  tale che  $U_{k+1} \subseteq U_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$  e sia  $(s_k)$  la successione convergente a  $\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  tale che  $s_k > \Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per come è stato definito  $\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  abbiamo

$$s_k > \liminf_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U_k} F_h(y),$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , quindi esiste una successione di indici  $(h_k)$  tale che

$$s_k > \inf_{y \in U_k} F_{h_k}(y)$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Dunque,  $\forall k \in \mathbb{N}$  esiste  $y_k \in U_k$  tale che  $s_k > F_{h_k}(y_k)$ . Definiamo ora una successione  $(x_h)$  ponendo  $x_h = y_k$ , se  $h = h_k$  per qualche  $k \in \mathbb{N}$ , e  $x_h = x$ , se  $h \neq h_k$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Poichè  $x_h \in U_k$  per ogni  $h \geq h_k$ , la successione  $(x_h)$  converge a  $x$  in  $X$ , e, dal momento che  $x_{h_k} = y_k$ , troviamo

$$\Gamma - \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} s_k \geq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_{h_k}(y_k) \geq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h).$$

La disuguaglianza opposta segue da (2.1).

Resta dunque da provare la seguente affermazione:

*Per ogni  $x \in X$  esiste una successione  $(x_h)$  convergente a  $x \in X$  tale che*

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h).$$

Fissiamo  $x \in X$  tale che  $\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) < +\infty$ . Siano  $(U_k)$  definiti come nella dimostrazione di (2.3) e consideriamo  $(t_k)$ , successione decrescente convergente a  $\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  in  $\bar{\mathbb{R}}$  tale che  $t_k > \Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  per ogni  $k \in \mathbb{N}$ . Per la definizione di  $\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x)$  abbiamo

$$t_k > \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_{y \in U_k} F_h(y)$$

per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , quindi esiste una successione crescente di indici  $(h_k)$  tale che:

$$t_k > \inf_{y \in U_k} F_h(y)$$

per ogni  $h \geq h_k$ . Questo implica che  $\forall h \geq h_k$  esiste  $y_k^h \in U_k$  tale che  $t_k > F_h(y_k^h)$ . Definiamo la successione  $(x_h)$  ponendo  $x_h = x$ , se  $h < h_1$ , e  $x_h = y_k^h$ , se  $h_k \leq h < h_{k+1}$ . Poichè  $x_h \in U_k$  per ogni  $h \geq h_k$ , la successione  $(x_h)$  converge a  $x$  in  $X$ , e dal momento che  $t_k > F_h(x_h)$  per ogni  $h \geq h_k$ , otteniamo:

$$\Gamma - \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} t_k \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h)$$

la disuguaglianza opposta segue da (2.2). □

**Esempio 2.2.1.** Sia:

$$F_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} / \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x = q_h \text{ con } h \geq n \\ 1 & \text{se } x = q_1, \dots, q_{n-1} \end{cases}$$

Chiaramente,  $F_h \rightarrow 0$  per  $h \rightarrow \infty$ . Esaminiamo ora, la  $\Gamma$ -convergenza di questa successione, utilizzando il teorema appena dimostrato:

1.  $\forall x \in X, \forall x_h \rightarrow x$  vale  $F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h)$ , poichè  $F_h(x_h) \geq 0$   
 $\forall x \in \mathbb{R}$
2.  $\forall x \in X, \exists x_h \rightarrow x$  tale che  $F(x) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h)$ , infatti grazie alla densità dei numeri razionali nell'insieme dei reali, sappiamo che  $\forall x \in X, \exists q_k \rightarrow x, q_k \in \mathbb{Q} \forall k$ . Fissato  $h$ , scelgo quindi  $k_h \geq h$ , e pongo  $x_h := q_{k_h}$ , in modo che  $F_h(x_h) = 0$ .

Anche in questo caso dunque, possiamo vedere come la normale nozione di limite puntuale si discosti da quella di  $\Gamma$ -limite.

La  $\Gamma$ -convergenza comporta una serie di conseguenze molto utili ai fini dello studio del funzionale di Modica-Mortola.

Se il  $\Gamma$ -limite esiste, è possibile definire la funzione  $F = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$ , come visto nel Teorema 2.1.1.

**Lemma 2.2.1.**  $F = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$  è *semicontinua inferiormente* su  $X$ .

CAPITOLO 2.  $\Gamma$ -CONVERGENZA: DEFINIZIONE E PRIME PROPRIETÀ

---

*Dimostrazione.* Siano  $x \in X$ ,  $x_h \rightarrow x$ . Allora  $\forall h \in \mathbb{N} \exists x_{k,h} \rightarrow x_h$  tale che:

$$F(x_h) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} F_k(x_{k,h})$$

Dunque  $\forall h$  esiste  $k_h$  tale che:

$$F(x_h) \geq F_{k_h}(x_{k_h,h}) - \frac{1}{h}, \frac{1}{h} > |x_{k_h,h} - x_h|, \forall k \geq k_h.$$

Dunque, con  $k=k_h$

$$\liminf_{h \rightarrow \infty} F(x_h) \geq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_{k_h}(x_{k_h,h}) \geq F(x),$$

poichè  $x_{k_h,h} \rightarrow x$ . □

Questo risultato ci sarà utile per la dimostrazione del seguente teorema:

**Teorema 2.2.2.** *Sia  $X$  compatto e sia  $F_h \geq C > -\infty \forall h \in \mathbb{N}$ . Se esiste  $F = \Gamma\text{-}\lim_{h \rightarrow \infty} F_h$  allora  $F$  ha minimo su  $X$  e inoltre*

$$\min_X F = \lim_{h \rightarrow \infty} \inf_X F_h.$$

*Dimostrazione.* Dall'ipotesi  $F_h \geq C > -\infty$  deduciamo che  $F(x) > -\infty \forall x \in X$ . Poichè  $F$  è sci su  $X$ , possiede minimo; esiste quindi  $x_0 \in X$  tale che:

$$F(x_0) = \min_{x \in X} F(x).$$

Dalla definizione di  $\Gamma$ -convergenza discende che esiste  $x_h \rightarrow x_0$  tale che:

$$F(x_0) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) \geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \inf_X F_h. \quad (2.4)$$

D'altra parte, esiste  $x_h \in X$  tale che:

$$a_h = F_h(x_h) \leq \inf_X F_h + \frac{1}{h}.$$

Verifichiamo ora che  $\forall$  sottosuccessione  $(a_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$  esiste una ulteriore sottosuccessione  $(a_{h_{k_j}})_{j \in \mathbb{N}}$  tale che:

$$F(x_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} (a_{h_{k_j}}). \quad (2.5)$$

Siccome  $X$  è compatto, la successione  $(x_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$  ammette una sottosuccessione convergente in  $X$ :

$$x_{h_{k_j}} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \bar{x} \in X.$$

Poichè  $F = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$  si ha:

$$F(x_0) \leq F(\bar{x}) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_{h_{k_j}}(x_{h_{k_j}}).$$

Questo prova (2.5), da cui segue:

$$F(x_0) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} (F_h(x_h)) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} \min_X F_h.$$

Da (2.2) e (2.3) deriva quindi la tesi:

$$F(x_0) = \lim_{h \rightarrow \infty} \inf_X F_{x_h}. \quad \square$$

Utilizziamo ora questo teorema per ottenere un importante risultato che lega i minimi delle funzioni  $F_h$  con il minimo del corrispondente  $\Gamma$ -limite:

**Teorema 2.2.3** (Convergenza dei minimi). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e siano  $F, F_h : X \rightarrow (-\infty, \infty]$  funzioni tali che  $F = \Gamma - \lim_{h \rightarrow \infty} F_h$ . Supponiamo esistano punti  $x, x_h \in X$  tali che:*

1.  $F_h(x_h) = \min_X F_h$

2.  $x_h \xrightarrow{h \rightarrow \infty} x$

Allora si ha  $F(x) = \min_X F$ .

*Dimostrazione.* Per definizione di  $\Gamma$ -convergenza, abbiamo:

$$F(x) \leq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) = \liminf_{h \rightarrow \infty} \min_X F_h.$$

D'altra parte,  $\forall y \in X$  esiste  $y_n \rightarrow y$  tale che:

$$\begin{aligned} F(y) &\geq \limsup_{h \rightarrow \infty} F_h(y_h) \\ &\geq \limsup_{h \rightarrow \infty} \min_X F_h \\ &\geq \liminf_{h \rightarrow \infty} F_h(x_h) \geq F(x). \end{aligned}$$

$\square$

**OSSERVAZIONE.** Se  $(x_h)$  minimizza  $F_h$ , allora anche  $\lambda_h F_h$  sarà minimizzato dalla successione  $(x_h)$ , per ogni  $\lambda_h > 0$ . Di conseguenza, informazioni riguardanti i limiti di  $(x_h)$  possono essere ricavate anche dai  $\Gamma$ -limiti di  $\lambda_h F_h$  e scelte differenti dei fattori  $\lambda_h$  generano  $\Gamma$ -limiti differenti, che forniscono a loro volta informazioni differenti. Dunque, nell'applicazione dei metodi della  $\Gamma$ -convergenza, risulterà importante l'individuazione del corretto riscaldamento, in modo da ottenere più informazioni possibili.

## Capitolo 3

# Il Teorema di Modica-Mortola

Analizziamo ora il Teorema di Modica-Mortola. Inizieremo considerando due differenti modelli utilizzati nello studio delle transizioni di fase, che ci risulteranno utili per capire l'enunciato del teorema di Modica-Mortola. Affronteremo poi la sua dimostrazione, concentrandoci sul caso 1,2-dimensionale. In questo capitolo, seguiremo [Alb00] e [Mon23].

### 3.1 Un esempio applicativo

Iniziamo illustrando una possibile applicazione del teorema di Modica-Mortola, che riguarda la teoria delle transizioni di fase.

#### Il modello classico

Si consideri un contenitore riempito con due fluidi immiscibili, trascurando eventuali interazioni dei due fluidi con le pareti del recipiente e l'azione della forza di gravità. Nella teoria delle transizioni di fase si assume che, al raggiungimento dell'equilibrio i due fluidi si distribuiscano in modo da minimizzare la superficie di contatto. Possiamo modellizzare questa situazione fisica nel seguente modo:

- Il recipiente è rappresentato da un dominio regolare e limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .
- Ogni configurazione del sistema è descritta da una funzione  $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  su  $\Omega$  che assume valore 0 nelle regioni occupate dal primo fluido, e 1 in quelle dove si trova il secondo. Poniamo inoltre come vincolo di volume la condizione  $\int_{\Omega} u = V$ , dove con  $V$  indichiamo il volume occupato dal secondo fluido.
- L'interfaccia tra i due liquidi è rappresentata dall'insieme dei punti di discontinuità della funzione  $u$ , e la indichiamo con  $Su$  al variare di  $u$ .
- Infine, consideriamo l'energia data dalla seguente espressione

$$F(u) := \sigma \mathcal{H}^2(Su)$$

dove il parametro  $\sigma$  è denominato *tensione superficiale* e  $\mathcal{H}^2$  è la misura di Hausdorff bidimensionale.

Dunque,  $F(u)$  è un'energia di superficie distribuita lungo  $Su$ ; per trovare la configurazione di equilibrio sarà quindi sufficiente minimizzare  $F$  sullo spazio delle configurazioni ammissibili.

### Il modello di Cahn-Hilliard

Secondo il modello di Cahn-Hilliard, la transizione di fase non avviene lungo una precisa interfaccia, ma è piuttosto un fenomeno continuo che si verifica in una regione molto sottile, all'interno della quale ammettiamo che si possa avere un mescolamento fine dei due fluidi. Rispetto all'interpretazione classica quindi:

- Il recipiente è ancora rappresentato da un dominio regolare e limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .
- Lo spazio delle configurazioni è dato dalle funzioni  $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , dove  $u(x)$  denota la densità del secondo fluido nel punto  $x$ . Il vincolo di volume è invece uguale a quello del modello classico.
- L'energia associata alla transizione di fase è data da

$$E_\varepsilon(u) := \varepsilon^2 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} W(u) dx$$

dove  $\varepsilon$  è un parametro positivo e piccolo a piacere e  $W$  è una funzione continua e non negativa che si annulla solo in 0 e 1.

## 3.2 Enunciato

Arriviamo quindi all'enunciato del Teorema di Modica-Mortola. Diamo alcune precisazioni riguardo la notazione:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  è un sottoinsieme aperto e limitato di  $\mathbb{R}^n$  con  $\partial\Omega$  Lipschitziano. Dato  $\text{vol}(\Omega) = \mathcal{L}^n(\Omega)$ , fissiamo un parametro  $0 < V < \text{vol}(\Omega)$ .
- Denoteremo con  $X$  l'insieme di tutte le funzioni misurabili  $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$  (rispetto alla misura di Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  dimensionale) tali che  $\int_{\Omega} u = V$ . Doteremo  $X$  della norma  $L^1(\Omega)$ .
- Come già visto nel modello di Cahn-Hilliard,  $W : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$  è una funzione continua e non negativa che si annulla solo in 0 e 1.
- $BV(\Omega, \{0, 1\})$  indica l'insieme di tutte le funzioni  $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  a variazione limitata. Equivalentemente, posto  $E = \{x \in \Omega : u(x) = 1\}$ , l'insieme  $E$  ha perimetro finito in  $\Omega$ .

- Dato  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ , indichiamo con  $Su$  la frontiera in misura di  $E = \{x \in \Omega : u(x) = 1\}$  (ovvero,  $Su = \partial_* E$ , si veda 1.2.4).
- Infine, ricordiamo che con la notazione  $\mathcal{H}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , intendiamo la misura di Hausdorff  $n$ -dimensionale.

**Teorema 3.2.1** (di Modica-Mortola). *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un insieme aperto e limitato, con frontiera  $\partial\Omega$  Lipschitziana. Sia inoltre*

$$\sigma := 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)} du$$

e per ogni  $\varepsilon > 0$  definiamo i funzionali  $F, F_\varepsilon : X \rightarrow [0, +\infty]$

$$F_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon} E_\varepsilon(u) = \begin{cases} \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega W(u) dx & \text{se } u \in W^{1,2}(\Omega) \cap X, \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e

$$F(u) := \begin{cases} \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su) & \text{se } u \in BV(\Omega) \cap X, \\ +\infty & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora il funzionale  $F_\varepsilon$   $\Gamma$ -converge per  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  a  $F$  in  $X$ . Inoltre, date due successioni  $(\varepsilon_h)_{h \in \mathbb{N}}$  e  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  con  $\varepsilon_h \rightarrow 0$  e  $F_{\varepsilon_h}(u_h)$  limitata,  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  è pre-compatta in  $X$ .

**OSSERVAZIONE.** Il Teorema 2.2.3 ci permette di ottenere informazioni sui minimi del  $\Gamma$ -limite, conoscendo opportune successioni minimizzanti  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ . Tale strategia per l'individuazione dei minimi diventa valida però solo nel caso in cui  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  sia pre-compatta in  $X$ , ovvero esiste almeno una sottosuccessione convergente ad un elemento  $v \in X$ . Il criterio di compattezza fornito nel Teorema 3.2.1 ci permette di concludere in tal senso, sotto opportune condizioni.

Grazie ai Teoremi 2.2.3 e 3.2.1, vale il seguente corollario:

**Corollario 3.2.1.** *Se  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  minimizza  $F_\varepsilon$  (o equivalentemente  $E_\varepsilon$ ) su  $X$  ed esiste  $v \in X$  tale che  $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v$ , allora  $v$  minimizza  $F$ .*

**OSSERVAZIONE.** Il riscaldamento  $F_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon} E_\varepsilon$  utilizzato nel teorema è ottimale. Valgono le seguenti proprietà:

1.  $E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$  con  $E(u) = \int_\Omega W(u)$ .
2. Se  $\lambda_\varepsilon \rightarrow \infty$  e  $\varepsilon \lambda_\varepsilon \rightarrow 0$  allora  $\lambda_\varepsilon E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$  con  $E(u) = 0$  dove  $u$  assume i valori 0 e 1 q.o. in  $\Omega$ , e  $E(u) = +\infty$  altrimenti.
3. Se  $\varepsilon \lambda_\varepsilon \rightarrow \infty$  allora  $\lambda_\varepsilon E_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} E$  con  $E(u) = +\infty$  in  $X$ .

In tutti questi casi, i minimi dei  $\Gamma$ -limiti così individuati non forniscono ulteriori informazioni rispetto al Teorema 3.2.1. Al contrario, la presenza del termine  $\mathcal{H}^{n-1}(Su)$  ci suggerisce che i minimi di  $F$  tendano a minimizzare anche la misura di  $Su$ .

*OSSERVAZIONE.* Grazie al Teorema 3.2.1 e al Corollario 3.2.1, il modello classico e quello di Cahn-Hilliard per le transizioni di fase sono collegati tra di loro: infatti, per il Teorema di Modica-Mortola, concludiamo che i minimi dei funzionali  $E_\varepsilon$  convergono ai minimi di  $F$ .

### 3.3 Dimostrazione

Daremo ora una dimostrazione del teorema di Modica-Mortola, partendo dal caso 1-dimensionale ed estendendo poi il risultato a dimensioni superiori. In particolare, considereremo il caso 2-dimensionale, per  $n > 2$  i ragionamenti saranno analoghi. Ricordiamo brevemente quali sono le affermazioni da provare:

- (i) **Precompattezza:** siano date una successione  $(\varepsilon_h)_{h \in \mathbb{N}}$  e  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  tale che  $\varepsilon_h \rightarrow 0^+$  e  $F_{\varepsilon_h}(u_h)$  limitata. Allora,  $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$  è pre-compatta in  $L^1(\Omega)$  ed ogni limite appartiene a  $BV(\Omega, \{0, 1\})$ ;
- (ii) **Disuguaglianza del liminf:** se  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$ ,  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset W^{1,2}(\Omega)$  e  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$  allora

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su);$$

- (iii) **Disuguaglianza del limsup:** per ogni  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$  esiste  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \subset W^{1,2}(\Omega)$  tale che  $u_\varepsilon \rightarrow u$  in  $L^1(\Omega)$ ,  $\int u_\varepsilon = \int u$  per ogni  $\varepsilon > 0$  e

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su).$$

#### 3.3.1 Il caso 1-dimensionale

Per  $n = 1$ , possiamo supporre che  $\Omega$  sia un intervallo aperto e limitato di  $\mathbb{R}$ . L'insieme  $BV(\Omega, \{0, 1\})$  diventa quindi la classe di tutte le funzioni  $u : \Omega \rightarrow \{0, 1\}$  con un numero finito di punti di discontinuità e  $\mathcal{H}^0$  è semplicemente la misura che conta i punti.

**Definizione 3.3.1** (Localizzazione di  $F_\varepsilon$ ). Definiamo la localizzazione del funzionale  $F_\varepsilon$  come

$$F_\varepsilon(u, A) := \varepsilon \int_A |\dot{u}|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_A W(u) dx$$

per ogni  $A \subset \Omega$  e  $u \in X$ . In particolare, vale  $F_\varepsilon(u) = F_\varepsilon(u, \Omega)$ .

*OSSERVAZIONE.* Una volta fissato il primo argomento,  $F_\varepsilon(u, A)$  è una misura positiva rispetto all'insieme  $A \subset \Omega$ .

Per ogni  $u$  e per ogni  $A$  definiamo  $u^\varepsilon(x) := u(\varepsilon x)$  e  $\frac{1}{\varepsilon} A := \{x \in \Omega : \varepsilon x \in A\}$ . Otteniamo quindi la seguente identità

$$F_\varepsilon(u, A) = F_1(u^\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} A). \quad (3.1)$$

**Definizione 3.3.2** (Il problema del profilo ottimale). Consideriamo la seguente quantità

$$\bar{\sigma} := \inf\{F_1(u, \mathbb{R}) : u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1\}. \quad (3.2)$$

Il problema di minimo relativo a  $\bar{\sigma}$  è chiamato *problema di profilo ottimale*, e una sua soluzione  $\gamma$  sarà un *profilo ottimale per la transizione*.

L'energia  $F_\varepsilon$  e  $\bar{\sigma}$  sono collegati dal seguente lemma:

**Lemma 3.3.1.** *Sia dato un intervallo  $I$  e una funzione  $u : I \rightarrow [0, 1]$ . Si supponga che esistano  $a, b \in I$  e  $\delta > 0$  tale che  $u(a) \leq \delta$  e  $u(b) \geq 1 - \delta$ . Allora, per ogni  $\varepsilon > 0$  vale*

$$F_\varepsilon(u, I) \geq \bar{\sigma} - O(\delta),$$

dove la stima sull'errore  $O(\delta)$  dipende da  $\delta$ , ma non da  $\varepsilon$  o  $u$ .

*Dimostrazione.* Possiamo assumere che  $a < b$  e  $I = (a, b)$ . Per l'identità (3.1), sarà sufficiente provare la disuguaglianza data quando  $\varepsilon = 1$ . Al fine di comparare  $F_\varepsilon(u, I)$  con  $\bar{\sigma}$  estendiamo  $u$  a tutto  $\mathbb{R}$ , come mostrato nella seguente figura:

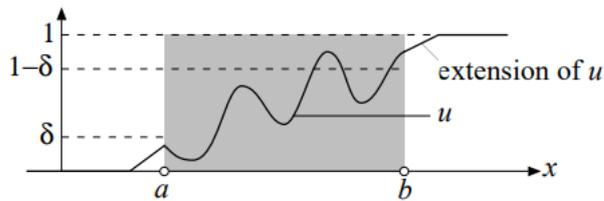


Figura 3.1: Estensione della funzione  $u$  fuori da  $I = (a, b)$

Ora, una stima immediata ci porta a dire che  $F_1(u, \mathbb{R}/I) \leq \delta + C\delta$ , dove  $C$  è il massimo valore di  $W$  in  $[0, 1]$ . Dunque, poniamo  $O(\delta) := (1 + C)\delta$  e concludiamo

$$F_1(u, I) = F_1(u, \mathbb{R}) - F_1(u, \mathbb{R}/I) \geq \bar{\sigma} - O(\delta).$$

□

Per quanto riguarda il problema del profilo ottimale, vale il seguente lemma

**Proposizione 3.3.1.** *L'inf in (3.2) è un minimo ed è dato dalla costante fornita nel Teorema 3.2.1, ovvero  $\bar{\sigma} = \sigma$  con*

$$\sigma = 2 \int_0^1 \sqrt{W(u)} du.$$

*Dimostrazione.* Verifichiamo prima che  $F_1(u, \mathbb{R}) \geq \sigma$  per ogni  $u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  che tende a 1 (risp. a 0) per  $x \rightarrow +\infty$  (risp.  $x \rightarrow -\infty$ ), dopodichè passeremo a dimostrare che l'uguaglianza vale per una particolare scelta di  $u$ . Utilizziamo la disuguaglianza  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ , con  $a := \dot{u}(x)$  e  $b := \sqrt{W(u)}$  nella definizione di  $F_1(u, \mathbb{R})$ , trovando quindi

$$\begin{aligned} F_1(u, \mathbb{R}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \{\dot{u}^2(x) + W(u(x))\} dx \\ &\geq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{u}(x) \sqrt{W(u(x))} dx = 2 \int_0^1 \sqrt{W(u(x))} du. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ora, sfruttiamo il fatto che l'uguaglianza nell'espressione  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  vale quando  $a = b$ , di conseguenza per avere l'uguaglianza anche in (3.3), occorre che  $u$  soddisfi l'equazione differenziale  $\dot{u} = \sqrt{W(u)}$ . Consideriamo quindi il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{u} = \sqrt{W(u)}. \\ u(0) = 1/2. \end{cases} \quad (3.4)$$

Le funzioni costanti 1 e 0 sono soluzioni di  $\dot{u} = \sqrt{W(u)}$ . Poichè  $\sqrt{W(u)}$  è continua, il problema a variabili separabili (3.4) ammette una soluzione globale in  $\mathbb{R}$ . Dal momento che  $W(u) > 0$  per  $0 < u < 1$  e  $u(0) = \frac{1}{2}$ , questa soluzione globale è crescente con  $W(u)$  che si annulla in 0 e 1, dunque deve convergere a 1 (risp. a 0) per  $x \rightarrow +\infty$  (risp.  $x \rightarrow -\infty$ ).  $\square$

Dimostriamo le affermazioni (i) e (ii). Per semplicità, ignoriamo il vincolo di volume. Per quanto riguarda (i), fissata  $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$ , applichiamo la disuguaglianza  $a^2 + b^2 \geq ab$  con  $a := \sqrt{W(u)}/\varepsilon$  e  $b := \sqrt{\varepsilon}|\nabla u|$ , e otteniamo

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(u) &= \int_\Omega (\varepsilon |\nabla(u)|^2 + \varepsilon^{-1} W(u)) dx \\ &\geq 2 \int_\Omega \sqrt{W(u)} |\nabla u| dx = \int_\Omega |\nabla(H(u))| dx \end{aligned} \quad (3.5)$$

dove  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa  $\dot{H} = 2\sqrt{W(u)}$ . Si consideri ora una successione  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  tale che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ . Innanzitutto, notiamo che  $H(u_\varepsilon) \in W^{1,2}(\Omega)$ : infatti,  $H \in C^1([0, 1])$ ,  $\dot{H} \in L^\infty([0, 1])$ ,  $H(0) = 0$  e  $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$  per ogni  $\varepsilon > 0$  con  $D(H(u_\varepsilon)) = 2\sqrt{W(u_\varepsilon)}\nabla(u_\varepsilon)$  (si veda

[EG92], sezione 4.2.2). Inoltre  $W^{1,2}(\Omega) \subset BV(\Omega)$  (si veda [EG92], sezione 5.1). La disuguaglianza (3.5) ci porta a concludere che  $H(u_\varepsilon)$  è uniformemente limitata in  $BV(\Omega)$ . Utilizziamo ora un'importante proprietà delle funzioni  $BV(\Omega)$ : una successione di funzioni  $H(u_\varepsilon)$  uniformemente limitata in  $BV(\Omega)$  è pre-compatta in  $L^1(\Omega)$  (si veda [EG92], sezione 5.2.3). Inoltre, poichè  $H$  ammette un'inversa continua, anche  $(u_\varepsilon)$  è pre-compatta in  $L^1(\Omega)$ . Per provare che  $u$  vale 0 oppure 1 quasi ovunque, possiamo procedere nel seguente modo: supponiamo che  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) < +\infty$ . A meno di sottosuccessioni, possiamo assumere che  $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} u$ ,  $u \in L^1(\Omega)$ . Applichiamo quindi il Lemma di Fatou e troviamo:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W(u) dx &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} W(u_\varepsilon) dx \\ &\leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \varepsilon F_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0. \end{aligned}$$

Di conseguenza,  $W(u) = 0$  q.o. in  $\Omega$ , ovvero  $u(x) \in \{0, 1\}$  per quasi ogni  $x \in \Omega$ .

Dimostriamo la disuguaglianza del liminf. In questa parte della dimostrazione, faremo riferimento a [Mon23]. Il ragionamento che segue è valido anche per il caso  $n$ -dimensionale, con  $n \geq 1$ . Per semplicità, ignoriamo il vincolo di volume. Sia  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0} \in L^1(\Omega)$  tale che  $u_\varepsilon \xrightarrow{L^1} u$ ,  $u \in L^1(\Omega)$ . Ricordiamo che dobbiamo provare la disuguaglianza

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sigma \mathcal{H}^{n-1}(Su). \quad (3.6)$$

Per quanto già visto al punto (i), possiamo supporre che la funzione limite  $u$  assuma valori 0 oppure 1 quasi ovunque. Quindi,  $u = \chi_E$ , per qualche insieme  $E \subset \Omega$  di perimetro finito. Inoltre, possiamo supporre che  $0 \leq u_\varepsilon \leq 1$ , perchè il troncamento di tali funzioni continua a convergere in  $L^1(\Omega)$  a  $u$  e l'energia  $E_\varepsilon$  diminuisce. Consideriamo la seguente funzione ausiliaria:

$$\varphi(t) = \int_0^t \sqrt{W(u)} du, \quad t \in [0, 1]$$

e quindi le funzioni:

$$\begin{aligned} w(u(x)) &:= \varphi(u(x)) = u(x) \int_0^1 \sqrt{W(u)} du \\ w_\varepsilon(x) &:= \varphi(u_\varepsilon(x)). \end{aligned}$$

Notiamo che  $\varphi'(t) = \sqrt{W(u)}$ . Di conseguenza, applicando il teorema di Lagrange alla funzione  $\varphi(t)$  e ponendo  $L := \sup_{0 \leq u \leq 1} \sqrt{W(u)} < +\infty$ , troviamo:

$$|w_\varepsilon - w| \leq L |u_\varepsilon - u|.$$



2. Per ogni funzione  $u$  definita su  $\Omega$  ed ogni  $y \in I$  denotiamo con  $u^y$  la funzione definita su  $J$  da  $u^y(z) := u(y, z)$ . Similmente, fissato  $z \in J$   $u^z$  sarà la funzione su  $I$  definita da  $u^z(y) := u(y, z)$ .
3. Denoteremo con  $\bar{F}_\varepsilon(u, A)$  la localizzazione di  $F_\varepsilon$  già vista nel caso 1-dimensionale, con  $A \subset \mathbb{R}$  intervallo aperto e  $u : A \rightarrow [0, 1]$ .

Ricordiamo ora che se  $u \in W^{1,2}(\Omega)$ , allora  $u^y \in W^{1,2}(J)$  per quasi ogni  $y \in I$  e  $u^z \in W^{1,2}(I)$  per quasi ogni  $z \in J$ . Come si può vedere in [EG92] sezione 4.9.2, vale

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x) = \dot{u}^y(z), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x) = \dot{u}^z(y) \quad \text{per quasi ogni } x \in \Omega$$

Poichè  $|\nabla u|^2 \geq |\frac{\partial u}{\partial z}|^2$ , otteniamo le seguenti disuguaglianze:

$$F_\varepsilon \geq \int_I \bar{F}_\varepsilon(u^y, J) dy \quad \left( \text{risp. } \int_J \bar{F}_\varepsilon(u^z, I) dz \right). \quad (3.7)$$

Per dedurre l'affermazione (i) dal caso 1-dimensionale, dobbiamo collegare la pre-compattezza della successione  $(u_\varepsilon)$  e la pre-compattezza delle successioni  $(u_\varepsilon^y)$ . Daremo, senza fornirne la dimostrazione, un risultato che ci permette di concludere in tal senso. Prima però, dobbiamo fare una precisazione. Siano  $(X, \|\cdot\|)$  uno spazio normato e  $(\bar{u}_\varepsilon), (u_\varepsilon)$  una successione. Allora  $(\bar{u}_\varepsilon)$  è  $\delta$ -vicina a  $(u_\varepsilon)$  se  $\|u_\varepsilon - \bar{u}_\varepsilon\| < \delta$  per ogni  $\varepsilon > 0$ .

**Proposizione 3.3.2.** *Si supponga che per ogni  $\delta > 0$  esista una successione  $(u_{\delta,\varepsilon})$  e  $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon})$   $\delta$ -vicina a  $(u_\varepsilon)$  tale che  $(u_{\delta,\varepsilon}^y)$  è pre-compatta in  $L^1(J)$  per quasi ogni  $y \in I$  e  $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon}^z)$  è pre-compatta in  $L^1(I)$  per quasi ogni  $z \in J$ ; allora  $(u_\varepsilon)$  è pre-compatta in  $L^1(\Omega)$ .*

*Dimostrazione.* Si veda [ABS98], sezione 6.3. □

Proviamo quindi l'affermazione (i). Consideriamo  $(u_\varepsilon)$  tale che  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C < +\infty$ . Allora, (3.7) implica che

$$C \geq \int_I \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) dy \quad \text{per ogni } \varepsilon > 0 \quad (3.8)$$

e una disuguaglianza simile vale per  $\bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^z, I)$ . Fissiamo ora  $\delta > 0$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  consideriamo  $u_{\delta,\varepsilon} : \Omega \rightarrow [0, 1]$  così da avere

$$u_{\delta,\varepsilon}^y := \begin{cases} u_\varepsilon^y & \text{se } \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) \leq C/\delta, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Grazie a (3.8), abbiamo che  $u_{\delta,\varepsilon}^y = u_\varepsilon^y$  per ogni  $y \in I$  tranne che per un insieme di misura minore di  $\delta$ , di conseguenza  $\|u_\varepsilon - u_{\delta,\varepsilon}\| \leq \delta|I| \leq \delta$ . Dunque

la successione  $(u_{\delta,\varepsilon})$  è  $\delta$ -vicina a  $(u_\varepsilon)$ . Inoltre per ogni  $y \in I$  vale  $\bar{F}_\varepsilon(u_{\delta,\varepsilon}^y, J) \leq C/\delta$  e quindi la successione  $(u_{\delta,\varepsilon}^y)$  è pre-compatta in  $L^1(J)$  per la versione 1-dimensionale di (i). In modo simile possiamo costruire una successione  $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon})$   $\delta$ -vicina a  $(u_\varepsilon)$  tale che  $(\hat{u}_{\delta,\varepsilon}^z)$  è pre-compatta in  $L^1(I)$  per quasi ogni  $z \in J$ , di conseguenza la Proposizione 3.3.2 ci assicura che la successione  $(u_\varepsilon)$  è pre-compatta in  $L^1(\Omega)$ . Si supponga ora che  $(u_\varepsilon)$  converga a  $u$  in  $L^1(\Omega)$ . Allora  $u_\varepsilon^y \rightarrow u^y$  in  $L^1(J)$  per quasi ogni  $y \in I$ , e se applichiamo il lemma di Fatou alla disuguaglianza (3.7) otteniamo

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \int_I \left[ \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J) \right] dy.$$

Di conseguenza,  $\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \bar{F}_\varepsilon(u_\varepsilon^y, J)$  è finito per quasi ogni  $y \in I$ , dunque  $u^y$  appartiene allo spazio  $BV(J, \{0, 1\})$  per via della versione 1-dimensionale di (i). Inoltre, la versione 1-dimensionale di (ii) implica

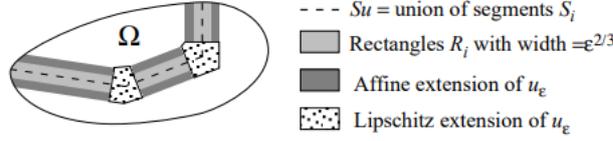
$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0^+} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \sigma \int_I \mathcal{H}^0(Su^y) dy, \quad (3.9)$$

e ricordando che  $\mathcal{H}^0(Su^y)$  è la variazione totale di  $u^y$  in  $BV(J)$ , tramite (3.9) possiamo concludere che  $\int_I \|\dot{u}^y\| dy < +\infty$ , e in maniera simile si conclude che  $\int_J \|\dot{u}^z\| dz < +\infty$ . Utilizziamo ora il seguente fatto generale: una funzione  $u \in L^1(\Omega)$  appartiene a  $BV(\Omega)$  se e solo se  $u^y \in BV(J)$  per quasi ogni  $y \in I$ ,  $u^z \in BV(I)$  per quasi ogni  $z \in J$ , e  $\int_J \|\dot{u}^z\| dz, \int_I \|\dot{u}^y\| dy$  sono entrambi finiti (si veda [EG92], sezione 5.10.2).

Infine, non ci resta che provare l'affermazione (iii). A differenza di (i), non procederemo per riduzione al caso 1-dimensionale. D'altra parte, è sufficiente provare la disuguaglianza del limsup per un particolare sottoinsieme denso  $\mathcal{D}$  in  $X$ . Infatti, se  $\forall u \in X$  esiste una successione approssimante  $(u_n) \subset \mathcal{D}$  tale che  $u_n \rightarrow u$  e  $F(u_n) \rightarrow F(u)$ , allora la condizione (iii) è rispettata per ogni elemento di  $\mathcal{D}$ . Inoltre, la densità dell'insieme  $\mathcal{D}$  ci permette di concludere che (iii) vale  $\forall u \in X$ .

In questo caso, sceglieremo come  $\mathcal{D}$  l'insieme di tutte le funzioni  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$  tali che  $Su$  è una curva di classe  $C^\infty$  con perimetro contenuto in  $\partial\Omega$ . Infatti, ogni  $u \in BV(\Omega, \{0, 1\})$  può essere approssimata da una successione  $(u_n) \subset \mathcal{D}$  tale che  $\mathcal{H}^1(Su_n) \rightarrow \mathcal{H}^1(Su)$  come visto nei Teoremi 1.2.3 e 1.2.5. Dunque, consideriamo  $u \in \mathcal{D}$ , e fissato  $\varepsilon > 0$  costruiamo  $u_\varepsilon$  nel seguente modo: ricopriamo  $Su$  con rettangoli disgiunti  $R_i$  di larghezza  $\varepsilon^{2/3}$ , a meno di un insieme residuo con misura di ordine  $\varepsilon^{2/3}$ :

All'interno di ciascun rettangolo  $R_i$  poniamo  $u_\varepsilon(x) := \gamma(x_i/\varepsilon)$  ( $\gamma$  è la soluzione del problema di minimo vista in (3.2)), dove  $x_i$  è la distanza


 Figura 3.3: Ricoprimento di  $Su$ 

(orientata) del punto  $x$  dal segmento  $S_i$ . Nei rettangoli piú scuri consideriamo un'estensione affine di  $u_\varepsilon$  che coincide con  $u$  nei lati che confinano con la regione bianca, e scegliamo la larghezza di ogni rettangolo in modo tale che la pendenza di  $u_\varepsilon$  sia  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Definiamo  $u_\varepsilon$  all'interno delle regioni punteggiate prendendo un'estensione Lipschitziana con la stessa costante di Lipschitz che  $u_\varepsilon$  possiede sul bordo, di ordine  $O(\varepsilon^{-1})$ . Nella regione bianca invece, poniamo  $u_\varepsilon$  uguale a  $u$ . Di conseguenza, dentro ogni  $R_i$  (e all'interno dei corrispondenti rettangoli scuri) la funzione  $u_\varepsilon$  varia solo nella direzione  $\nu_i$  normale ad  $S_i$ , e  $F_\varepsilon(u_\varepsilon, R_i) \leq \sigma \mathcal{H}^1(S_i)$ ; mentre il contributo delle altre regioni tende a zero per  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Quindi  $F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \sigma \mathcal{H}^1(Su) + o(1)$ . La dimostrazione di (iii) è completata.

### 3.4 Il caso vettoriale

Il modello riguardante le transizioni di fase visto nella sezione (3.1) si applica a miscugli di 2 soli fluidi, ma è possibile effettuare una generalizzazione, considerando un numero arbitrario  $m > 2$  di liquidi. In tal caso, ogni configurazione del modello macroscopico può essere descritta da una funzione  $u : \Omega \rightarrow \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$  dove  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  sono punti affinementemente indipendenti scelti arbitrariamente in  $\mathbb{R}^{m-1}$ , ovvero tali che il piú piccolo sottospazio affine che li contiene ha dimensione  $m$ . L'energia  $F(u)$  viene ridefinita come

$$F(u) := \sum_{i < j} \sigma_{ij} \mathcal{H}^2(S_{ij}u),$$

dove  $S_{ij}u$  è l'interfaccia fra le fasi  $\{u = \alpha_i\}$  e  $\{u = \alpha_j\}$ , e  $\sigma_{ij}$  è la tensione superficiale corrispondente. Se  $V_i$  è il volume totale della fase  $\alpha_i$ , allora le configurazioni ammissibili devono soddisfare il vincolo di volume dato da  $\int_\Omega u = \sum V_i \alpha_i$ . Si noti che il problema di minimo corrispondente è ben posto se i coefficienti  $\sigma_{ij}$  soddisfano le seguenti condizioni

$$\sigma_{ij} + \sigma_{jk} \geq \sigma_{ik} \quad \text{per ogni } i, j, k.$$

Infatti, se una di queste disuguaglianze non valesse, allora  $F$  non sarebbe inferiormente semicontinua su  $BV(\Omega, \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\})$ .

Nel modello continuo,  $u$  assume valori nell'involuppo convesso  $T$  di  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ . Infatti le funzioni  $u$  tengono conto delle "densità" di tutti i fluidi considerati, ed in ogni punto  $x \in \Omega$  deve valere la seguente condizione:

$$u(x) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \alpha_i \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Dove il vincolo in (3.4) serve per indicare che in  $\Omega$ , oltre a quelle dei fluidi considerati. L'energia  $E_\varepsilon(u)$  è definita come nel modello di Cahn-Hilliard con  $W$  una funzione continua e positiva su  $\mathbb{R}^{m-1}$  che si annulla in corrispondenza di  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ . Ponendo  $\sigma_{ij} := \text{dist}(\alpha_i, \alpha_j)$  dove  $\text{dist}$  è la distanza geodetica su  $T$  associata con la metrica  $\sqrt{W(u)} du$ , il teorema di Modica-Mortola continua a rimanere valido. Si noti come i problemi di profilo ottimale diventano

$$\bar{\sigma}_{ij} := \inf \{ F_1(u, \mathbb{R}) : u : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \alpha_i, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \alpha_j \}.$$

## Bibliografia

- [ABS98] Giovanni Alberti, Guy Bouchitté e Pierre Seppecher. «Phase transitions with line tension effect». In: *Archive for rational mechanics and analysis* (1998), pp. 1–49.
- [AFP00] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco e Diego Pallara. *Functions of Bounded Variations and Free Discontinuity Problems*. 1a edizione. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications, 2000.
- [Alb00] Giovanni Alberti. «Variational models for phase transitions. An approach via  $\Gamma$ -convergence». In: *Calculus of variations and partial differential equations. Topics on geometrical evolution problems and degree theory* (2000), pp. 95–114.
- [EG92] Lawrence C. Evans e Roland F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of functions*. 1a edizione. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, 1992.
- [JL98] Jurgen Jost e Xianqing Li-Jost. *Calculus of Variations*. 1a edizione. Cambridge studies in advanced mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [Mas93] Gianni Dal Maso. *An Introduction to Gamma-Convergence*. 1a edizione. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Birkhauser, 1993.
- [Mil97] John Willard Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint*. 1a edizione. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, 1997.
- [Mon23] Roberto Monti. *Calculus of Variations. Lecture notes, part 2*. 2023. URL: <https://www.math.unipd.it/~monti/CdV2023.html>.