

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI
DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Teoremi di esistenza e unicità di soluzioni deboli
per l'Equazione di Trasporto per campi di Sobolev.

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureanda: Ottavia Comacchio
Matricola: 2089552

Anno Accademico 2024/2025

25 luglio 2025

Indice

Indice	3
Introduzione	5
1 Risultati preliminari	7
1.1 Soluzione classica dell'Equazione di Trasporto	7
1.2 Contributo della divergenza del campo	9
2 Esistenza di soluzioni deboli	11
2.1 Soluzioni deboli	11
2.2 Teorema di esistenza di soluzioni deboli	12
2.3 Stabilità di soluzioni deboli	15
3 Unicità di soluzioni deboli	21
3.1 Teorema di unicità di soluzioni deboli	21
3.2 Controesempio	23
Bibliografia	27

Introduzione

L'equazione di trasporto è un'equazione differenziale alle derivate parziali della forma:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \nabla u(x, t) \cdot f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

dove $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale e $u(x, t)$ è la funzione incognita. Il problema che affronteremo sarà considerato con il dato iniziale $u(x, 0) = g(x)$, assumendo che g sia una funzione con proprietà opportune.

Le equazioni di trasporto costituiscono uno strumento centrale in numerosi modelli fisici e matematici, sono utilizzate in ambiti che spaziano dalla fluidodinamica all'elettromagnetismo, rendendo fondamentale l'analisi del problema in situazioni non regolari.

Lo scopo principale di questo lavoro di tesi è di studiare la generalizzazione dei teoremi di esistenza e unicità delle soluzioni dell'equazione di trasporto al caso di campi irregolari appartenenti allo spazio di Sobolev $W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Nel primo capitolo presentiamo la teoria classica per l'equazione di trasporto con campi vettoriali di classe C^1 , un punto di partenza necessario per poter espandere la trattazione.

Lo studio dell'equazione di trasporto per campi di Sobolev è stato sviluppato da DiPerna e Lions nell'articolo "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces" pubblicato in *Inventiones mathematicae* nel 1989, nel quale gli autori hanno dimostrato dei risultati di esistenza, unicità e stabilità: questa teoria permette di dedurre gli stessi risultati per il Problema di Cauchy nella sua formulazione tradizionale per campi di Sobolev. La teoria è stata successivamente estesa a campi di Sobolev a campi BV, ovvero a variazione totale limitata, da L. Ambrosio nell'articolo "Transport equation and Cauchy problem for BV vector fields" pubblicato in *Inventiones mathematicae* nel 2004.

È necessario innanzitutto introdurre il concetto di soluzione debole, generalizzando la nozione classica di soluzione.

Nell'estensione della teoria a campi meno regolari occorre assumere delle ipotesi aggiuntive sulla divergenza del campo f : dimostreremo l'esistenza di soluzioni deboli per l'equazione (1) se $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L_{\text{loc}}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con l'ipotesi $\text{div} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. La dimostrazione si basa su tecniche di regolarizzazione tramite convoluzioni e sull'utilizzo della compattezza debole*.

Successivamente, discutiamo i risultati di stabilità essenziali per studiare come approssimazioni delle soluzioni deboli influiscano sulla struttura dell'equazione (1). Nell'ultimo teorema determiniamo l'unicità delle soluzioni deboli per l'equazione di trasporto quando $f \in W_{\text{loc}}^{1,q}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ è tale che $\text{div} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$\frac{|f(x)|}{1 + |x|} \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Queste ipotesi assicurano una sufficiente regolarità per le derivate del campo e ne controllano la crescita all'infinito.

Infine proponiamo un controesempio per mostrare la necessità delle ipotesi del teorema di unicità. Consideriamo un campo vettoriale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ con divergenza nulla in senso distribuzionale ma che non appartiene allo spazio $W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ e troviamo due flussi distinti che risolvono l'equazione differenziale ordinaria associata a f .

Capitolo 1

Risultati preliminari

In questo primo capitolo studiamo la soluzione classica dell'Equazione di Trasporto per campi di classe C^1 . Tale risultato non ha solo uno scopo introduttivo al problema, ma è anche essenziale per comprendere il legame con il Problema di Cauchy nella sua formulazione tradizionale. Successivamente, viene mostrata una stima sulla soluzione dell'equazione che mostra come la divergenza del campo f “controlli” la sua regolarità. Queste considerazioni suggeriscono quali condizioni siano necessarie al fine di generalizzare l'analisi a campi meno regolari.

1.1 Soluzione classica dell'Equazione di Trasporto

Ricordiamo che un campo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ di classe C^1 è anche localmente lipshitziano, dunque il Teorema di esistenza e unicità locale garantisce che esiste un'unica soluzione locale γ_x del Problema di Cauchy, per $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = f(\gamma), \\ \gamma(0) = x, \end{cases} \quad (1.1)$$

dove γ è una curva a valori in $\mathbb{R}^n$. Se per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ γ_x è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$, ad esempio nel caso in cui f sia limitato, allora $\gamma_x(t) \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ è soluzione globale di (1.1) ed è possibile definire il flusso $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ di f come $\Phi(t, x) = \gamma_x(t)$. Per ogni $t \in \mathbb{R}$ fissato definiamo il diffeomorfismo $\Phi_t \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ponendo $\Phi_t(x) = \Phi(t, x)$. Si ha $\Phi_0 = \text{Id}$ e il flusso verifica la proprietà di gruppo $\Phi_{s+t} = \Phi_s \circ \Phi_t$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$, in particolare $\Phi_{-t} = \Phi_t^{-1}$.

Il teorema seguente racchiude il legame tra l'Equazione di Trasporto (1) e il Problema di Cauchy classico (1.1). Vedremo infatti che l'esistenza del flusso di $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ implica l'esistenza di una soluzione dell'Equazione di Trasporto per ogni dato iniziale $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1.1. *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale limitato e sia $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$ definita da $u(x, t) = g(\Phi_{-t}(x))$ è soluzione del*

Problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \nabla u(x, t) \cdot f(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.2)$$

dove $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il flusso di f .

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che $u(x, t) = g(\Phi_{-t}(x))$ è soluzione del problema (1.2).

Sia $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ una funzione test. Otteniamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) u(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) g(\Phi_{-t}(x)) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(\Phi_t(x')) g(x') \det J\Phi_t(x') dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} [\psi(\Phi_t(x')) \det J\Phi_t(x')] g(x') dx' \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\nabla \psi(\Phi_t(x')) \dot{\Phi}_t(x') \det J\Phi_t(x') \right. \\ &\quad \left. + \psi(\Phi_t(x')) \frac{\partial}{\partial t} \det J\Phi_t(x') \right] g(x') dx'. \end{aligned}$$

Nel quarto integrale abbiamo fatto il cambiamento di variabile $x = \Phi_t(x')$.

Sostituiamo la seguente identità nell'equazione precedente

$$\frac{\partial}{\partial t} (\det(J\Phi_t(x))) = \operatorname{div} f(\Phi_t(x)) \det(J\Phi_t(x)).$$

Otteniamo così:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\nabla \psi(\Phi_t(x')) \dot{\Phi}_t(x') \right. \\ &\quad \left. + \psi(\Phi_t(x')) \operatorname{div} f(\Phi_t(x')) \right] \det J\Phi_t(x') g(x') dx'. \end{aligned}$$

Con un ulteriore cambiamento di variabile $x = \Phi_t(x')$ e ricordando che $\dot{\Phi}_t(x') = f(x)$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla \psi(x) f(x) + \psi(x) \operatorname{div} f(x)] g(\Phi_{-t}(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \nabla \psi(x) f(x) u(x, t) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \operatorname{div} f(x) u(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \nabla u(x, t) \cdot f(x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \operatorname{div} f(x) u(x, t) dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \operatorname{div} f(x) u(x, t) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \nabla u(x, t) \cdot f(x) dx. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di $\psi \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ si deduce che:

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -\nabla u(x, t) \cdot f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Abbiamo dunque dimostrato che $u(x, t) = g(\Phi_{-t}(x))$ è soluzione di (1.2). $\square$

Osserviamo che la soluzione $u(x, t) = g(\Phi_{-t}(x))$ di (1.2) è unica. Per dimostrare l'unicità della soluzione si adotta il metodo delle caratteristiche. Si veda Partial Differential Equations di L. C. Evans [3] per una trattazione completa; si vedano in particolare il Lemma 2 (p. 106), il Teorema 2 (p. 107) e l'applicazione a p. 110.

1.2 Contributo della divergenza del campo

Nei prossimi capitoli presenteremo i teoremi di esistenza e unicità di soluzioni deboli per l'equazione di trasporto per campi f di Sobolev. Verrà richiesta l'ipotesi $\operatorname{div} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$: è dunque fondamentale capire il suo significato. In primo luogo, come vedremo nel prossimo teorema, il fatto che $\operatorname{div} f$ appartenga ad $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ garantisce una stima sulla norma L^p della soluzione: la norma non può crescere in modo arbitrario ma la sua crescita è al più esponenziale e controllata da $\|\operatorname{div} f\|_\infty$. Un ulteriore motivo è legato alla seguente identità:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{L}^n(\Phi_t(A)) &= \left. \frac{d}{dt} \left(\int_{\Phi_t(A)} dx \right) \right|_{t=0} \\ &= \left. \frac{d}{dt} \left(\int_A \det J\Phi_t(x) dx \right) \right|_{t=0} \\ &= \int_A \operatorname{div} f(x) dx. \end{aligned}$$

Da questa uguaglianza si evince che la divergenza di f descrive come varia la misura di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lungo il flusso Φ del campo.

Teorema 1.2.1. *Sia $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{div} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sia $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, $T > 0$, la soluzione di*

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot f(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Allora per ogni $t \in [0, T]$ e per ogni $p \in [1, \infty)$ si ha

$$\|u(\cdot, t)\|_p \leq e^{t\|\operatorname{div} f\|_\infty/p} \|g\|_p.$$

Dimostrazione. Sia $1 \leq p < +\infty$. Fissato $t \in [0, T]$ definiamo l'insieme $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : u(x, t) \neq 0\}$. Allora:

$$\frac{\partial}{\partial t}|u|^p + \nabla|u|^p \cdot f = 0 \quad \text{in } A_t. \quad (1.3)$$

Integriamo dunque (1.3) in A_t :

$$\begin{aligned} \int_{A_t} \frac{\partial}{\partial t}|u|^p dx &= - \int_{A_t} \nabla|u|^p \cdot f dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla|u|^p \cdot f dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \operatorname{div} f dx \leq \|\operatorname{div} f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx. \end{aligned}$$

Dove abbiamo usato che se $u(\cdot, t) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, allora $|u(\cdot, t)|$ è differenziabile per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ e $\nabla|u(x, t)| = 0$ per q.o. $x \in A_t^c$.

Ora definiamo

$$K = \bigcup_{t \in [0, T]} \Phi_{-t}(\operatorname{supp}(g)).$$

K è limitato poiché g è a supporto compatto. Inoltre $|\nabla|u|^p \cdot f|$ è continua, quindi $M = \sup_{x \in K, t \in [0, T]} |\nabla|u|^p \cdot f| < \infty$. Da (1.3) otteniamo

$$\left| \frac{\partial}{\partial t}|u(x, t)|^p \right| = |\nabla|u(x, t)|^p \cdot f(x)| \leq M \chi_K(x), \quad \forall t \in [0, T], \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Poiché $M \chi_K(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$, per il teorema di convergenza dominata risulta

$$\int_{A_t} \frac{\partial}{\partial t}|u(x, t)|^p dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx.$$

La derivata della funzione

$$\varphi(t) = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx, \quad t \in [0, T],$$

soddisfa la seguente disuguaglianza per ogni $t \in [0, T]$:

$$\varphi'(t) = \int_{A_t} \frac{\partial}{\partial t}|u(x, t)|^p dx \leq \|\operatorname{div} f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx = \|\operatorname{div} f\|_\infty \varphi(t).$$

Dunque, integrando si ottiene

$$\varphi(t) \leq e^{t\|\operatorname{div} f\|_\infty} \varphi(0) \quad \forall t \in [0, T],$$

ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx \leq e^{t\|\operatorname{div} f\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx.$$

□

Capitolo 2

Esistenza di soluzioni deboli

In questo capitolo viene trattato il primo argomento principale della tesi: il teorema di esistenza di soluzioni deboli per l'Equazione di Trasporto con coefficienti di Sobolev. La definizione di soluzione debole è fondamentale, poiché non sempre è possibile trovare soluzioni classiche e dobbiamo quindi limitarci a soluzioni più deboli, pensate in senso distribuzionale. La dimostrazione evidenzia il ruolo cruciale giocato da unità approssimate, convoluzioni e topologie deboli* nella costruzione della teoria.

Nella seconda parte, esamineremo il teorema di stabilità per le soluzioni deboli, il quale garantisce che piccole perturbazioni delle soluzioni soddisfano un'equazione che si avvicina, in senso opportuno, all'Equazione di Trasporto.

2.1 Soluzioni deboli

Nella definizione di soluzione debole adottiamo un approccio di tipo distribuzionale, che consente di estendere la nozione di soluzione anche al caso di campi di Sobolev, per i quali una soluzione classica non è in generale definibile.

Per costruire una soluzione debole moltiplichiamo l'Equazione di Trasporto per una funzione C^1 a supporto compatto, detta funzione test. Successivamente integriamo l'equazione ottenuta in modo da poter trasferire le derivate della soluzione alla funzione test tramite integrazione per parti.

Al fine di formalizzare il problema, introduciamo le seguenti notazioni. Siano $T > 0$ e $1 \leq p < \infty$ e sia $u : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ misurabile. Sono definite le seguenti norme:

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} := \operatorname{ess\,sup}_{t \in (0,T)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \| \|u(\cdot, t)\|_{L^p} \|_{L^\infty},$$

$$\|u\|_{L^1(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} := \int_0^T \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dt = \| \|u(\cdot, t)\|_{L^p} \|_{L^1}.$$

Gli spazi associati sono:

$$L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n)) = \{u : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ misurabile: } \|u\|_{L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))} < \infty\},$$

$$L^1(0, T; L^p(\mathbb{R}^n)) = \{u : \mathbb{R}^n \times (0, T) \rightarrow [-\infty, +\infty] \text{ misurabile: } \|u\|_{L^1(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))} < \infty\}.$$

Definizione 2.1.1. Siano $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vettoriale localmente integrabile e $1 \leq q \leq +\infty$. Diciamo che $\operatorname{div} f \in L^q_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ in senso distribuzionale se esiste una funzione $h \in L^q_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ tale che per ogni $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot \nabla \phi(x) dx.$$

In questo caso definiamo $\operatorname{div} f := h \in L^q_{\operatorname{loc}}$.

Definizione 2.1.2 (Soluzione debole). Sia $g \in L^p_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ e sia $f \in L^q_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale tale che $\operatorname{div} f \in L^q_{\operatorname{loc}}(\mathbb{R}^n)$ in senso distribuzionale. Diciamo che $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ è una soluzione debole del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot f(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.1)$$

se per ogni $v \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0)g(x) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) [v_t(x, t) + \operatorname{div}(v(x, t)f(x))] dx dt = 0. \quad (2.2)$$

Osservazione 2.1.3. Ogni soluzione classica è anche soluzione debole. Siano $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $g \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \cap L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ soluzione di (2.1). Consideriamo $v \in C^1_c(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ e integriamo $vu_t + v(\nabla u \cdot f) = 0$:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} vu_t dx dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(\nabla u \cdot f) dx dt = 0.$$

Sostituendo le seguenti identità si trova l'equazione (2.2), ovvero u è soluzione debole del problema iniziale.

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t)u_t(x, t) dx dt = -v(x, 0)u(x, 0) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v_t(x, t)u(x, t) dx dt,$$

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(\nabla u \cdot f) dx dt = - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u \operatorname{div}(vf) dx dt.$$

2.2 Teorema di esistenza di soluzioni deboli

Il Teorema di esistenza è basato su due concetti fondamentali. Il primo è l'approssimazione per convoluzione: regolarizzare i coefficienti dell'equazione tramite famiglie di mollificatori permette di costruire una successione di soluzioni C^∞ di problemi regolari.

Ricordiamo che, data $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $\text{supp } \varphi \subseteq B_1(0)$ e $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) dx = 1$, $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ si dice famiglia di mollificatori, dove

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Nel seguito, data una funzione h , scriveremo h_ε per indicare il prodotto di convoluzione tra h e un elemento φ_ε di una famiglia di mollificatori, ovvero

$$h_\varepsilon(x) = h * \varphi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x-y) \varphi_\varepsilon(y) dy.$$

Inoltre dato $p \in [1, +\infty]$ diciamo che $q \in [1, +\infty]$ è l'esponente coniugato di p se

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Stiamo dicendo che 1 e $+\infty$ sono coniugati.

Il secondo è la compattezza debole*: poichè lo spazio $L^1(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))$ con $q < \infty$ è separabile, allora per il teorema di Banach-Alaoglu ogni successione limitata nel suo duale $L^1(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))^* = L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ ammette una sottosuccessione che converge debolmente* ad un elemento di $L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$. Per indicare che una successione $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ di funzioni converge ad una funzione u nella topologia debole* scriveremo $u_k \xrightarrow{*} u$, ovvero

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_k(x, t) v(x, t) dx dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t) v(x, t) dx dt,$$

per ogni $v \in L^1(0, T; L^q(\mathbb{R}^n))$. Si veda Functional Analysis di Haim Brezis [5], in particolare il Corollario 3.30 a pagina 76.

Osserviamo che, in analisi, fra gli strumenti principali per dimostrare l'esistenza di soluzioni vi sono la compattezza e i teoremi di punto fisso. Mentre i teoremi di punto fisso portano a risultati di esistenza e unicità, la compattezza usa argomenti più generali e per questo non implica necessariamente l'unicità delle soluzioni. Nel Capitolo 3 per dimostrare un risultato di unicità dovremo introdurre delle ulteriori ipotesi.

Teorema 2.2.1 (Esistenza). *Siano $T > 0$, $1 < p \leq \infty$ e q l'esponente coniugato di p . Siano $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $f \in L_{loc}^q(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ tale che $\text{div } f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ soluzione debole di*

$$\begin{cases} u_t(x, t) + \nabla u(x, t) \cdot f(x) = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Dimostrazione. Come prima cosa regolarizziamo f e g tramite convoluzioni in x . Sia $\{\varphi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è una famiglia di mollificatori, allora esistono $g_\varepsilon = g * \varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $f_\varepsilon = f * \varphi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, $\varepsilon > 0$, tali che:

- i) $\|g_\varepsilon\|_p \leq \|g\|_p$ e $g_\varepsilon \rightarrow g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $\varepsilon \rightarrow 0$ se $p \neq \infty$; $g_\varepsilon(x) \rightarrow g(x)$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ se $p = \infty$.
- ii) $\|\operatorname{div} f_\varepsilon\|_\infty \leq \|\operatorname{div} f\|_\infty$, $\operatorname{div}(f_\varepsilon(x)) \rightarrow \operatorname{div}(f(x))$ per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$ e $f_\varepsilon \rightarrow f$ in $L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$

Tali proprietà si possono trovare in *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* di Gerald B. Folland [6], in particolare nel Teorema 8.14 a pagina 242. Il Teorema 1.1.1 garantisce che esiste (ed è unica) $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ soluzione di:

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \nabla u_\varepsilon \cdot f_\varepsilon = 0, & (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u_\varepsilon(x, 0) = g_\varepsilon(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (2.4)$$

Per il Teorema 1.2.1, per ogni $t \in [0, T]$ e $p \in [1, \infty)$ si ha:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x, t)|^p dx \leq e^{t\|\operatorname{div} f_\varepsilon\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_\varepsilon(x)|^p dx \leq e^{T\|\operatorname{div} f\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p dx.$$

Dunque la famiglia $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ è limitata in $L^\infty((0, T); L^p(\mathbb{R}^n))$, perciò esiste una successione $\varepsilon_j \rightarrow 0$ per $j \rightarrow +\infty$ e una funzione $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ tale che $u_{\varepsilon_j} \xrightarrow{*} u$ per $j \rightarrow +\infty$.

Vogliamo dimostrare che u è una soluzione debole di (2.3).

Dato che $u_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ è soluzione di (2.4), allora per ogni $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) g_\varepsilon(x) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_\varepsilon(x, t) [v_t(x, t) + \operatorname{div}(v(x, t) f_\varepsilon(x))] dx dt = 0. \quad (2.5)$$

Inoltre,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) g_\varepsilon(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) g(x) dx + \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) (g_\varepsilon(x) - g(x)) dx \right),$$

e per il teorema di convergenza dominata possiamo passare al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) g_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0) g(x) dx.$$

Similmente, utilizzando le proprietà della convoluzione elencate in precedenza, si ricavano le seguenti identità:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_{\varepsilon_j} v_t dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u v_t dx dt, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_{\varepsilon_j} v \operatorname{div} f_{\varepsilon_j} dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u v \operatorname{div} f dx dt, \\ \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_{\varepsilon_j} \nabla v \cdot f_{\varepsilon_j} dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u \nabla v \cdot f dx dt. \end{aligned}$$

Passando al limite in (2.5) possiamo concludere che per ogni $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}^n} v(x, 0)g(x) dx + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(x, t)[v_t(x, t) + \operatorname{div}(v(x, t)f(x))] dx dt = 0.$$

Ovvero $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ è soluzione debole di (2.3). □

2.3 Stabilità di soluzioni deboli

Il teorema che proveremo in questa sezione fornisce una proprietà di stabilità per le soluzioni deboli dell'equazione di trasporto. In particolare mostra che, rendendo più regolare la soluzione tramite convoluzioni, otteniamo un'approssimazione della soluzione che quasi soddisfa l'equazione di trasporto, con un errore R_ε che tende a zero nel limite L_{loc}^1 .

Questo teorema permette di capire quale sia l'effetto di piccole approssimazioni delle soluzioni deboli dell'equazione studiata. Tale risultato sarà essenziale per dimostrare l'unicità della soluzione nel prossimo capitolo.

Ricordiamo le definizioni di derivate parziali deboli e di spazio di Sobolev. Data $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ e $i \in \{1, \dots, n\}$, diciamo che $g_i \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ è la derivata parziale debole di f rispetto a x_i in $\mathbb{R}^n$ se

$$\int_{\mathbb{R}^n} f v_{x_i} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} g_i v dx \quad \forall v \in C_c^1(\mathbb{R}^n).$$

Se la derivata parziale debole di f rispetto a x_i esiste allora è unicamente definita per q.o. $x \in \mathbb{R}^n$; scriviamo dunque $f_{x_i} = g_i$ ($i = 1, \dots, n$).

Inoltre diciamo che f appartiene allo spazio di Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ e se, per $i = 1, \dots, n$, esiste la derivata parziale debole $f_{x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

In particolare $f \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ se $f \in W^{1,p}(U; \mathbb{R}^n)$ per ogni $U \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato.

Teorema 2.3.1 (Stabilità). *Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ esponenti coniugati e sia $f \in W_{loc}^{1,q}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Data $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ soluzione debole di*

$$u_t + \nabla u \cdot f = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

*allora la funzione $u_\varepsilon(x, t) = u(\cdot, t) * \varphi_\varepsilon(x)$ soddisfa in senso distribuzionale l'equazione differenziale*

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \nabla u_\varepsilon \cdot f = R_\varepsilon, \tag{2.6}$$

dove $R_\varepsilon \in L^1(0, T; L_{loc}^1(\mathbb{R}^n))$ è data da

$$R_\varepsilon = f \cdot \nabla u_\varepsilon - (f \cdot \nabla u)_\varepsilon. \tag{2.7}$$

Inoltre per ogni $r > 0$ si ha

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^T \|R_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(B_r)} dt = 0. \tag{2.8}$$

Dimostrazione. Come prima cosa osserviamo che la funzione R_ε in (2.7) è ben definita, in quanto

$$\begin{aligned} f \cdot \nabla u_\varepsilon(x, t) &= f(x) \cdot \nabla(u(\cdot, t) * \varphi_\varepsilon(x)) = f(x) \cdot (u(\cdot, t) * \nabla \varphi_\varepsilon(x)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) f(x) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) dy, \end{aligned}$$

e inoltre

$$\begin{aligned} (f \cdot \nabla u)_\varepsilon(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot \nabla u(y, t) \varphi_\varepsilon(x - y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \operatorname{div}(f(y) \varphi_\varepsilon(x - y)) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) [f(y) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) - \varphi_\varepsilon(x - y) \operatorname{div} f(y)] dy. \end{aligned}$$

Otteniamo dunque

$$R_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) [(f(x) - f(y)) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) + \varphi_\varepsilon(x - y) \operatorname{div} f(y)] dy, \quad (2.9)$$

e quindi per ogni $r > 0$

$$\int_0^T \|R_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(B_r)} dt < \infty. \quad (2.10)$$

Omettiamo la dimostrazione di (2.10) in quanto dimostreremo (2.8), che garantisce una condizione più forte.

Ora vogliamo mostrare che se (2.6) è valida in senso distribuzionale, allora R_ε è della forma (2.9).

Sia $v \in C_c^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ una funzione test. Abbiamo:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} R_\varepsilon(x, t) v(x, t) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) \left[\frac{\partial u_\varepsilon(x, t)}{\partial t} + f(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x, t) \right] dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [v(x, t) f(x) \cdot \nabla u_\varepsilon(x, t) - v_t(x, t) u_\varepsilon(x, t)] dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) [v(x, t) f(x) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) - v_t(x, t) \varphi_\varepsilon(x - y)] dy dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \int_{\mathbb{R}^n} [v(x, t) f(x) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) - v_t(x, t) \varphi_\varepsilon(x - y)] dx dy dt. \end{aligned}$$

Dalla definizione di soluzione debole (2.2) si trova:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \int_{\mathbb{R}^n} v_t(x, t) \varphi_\varepsilon(x - y) dx dy dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \partial_t v_\varepsilon(y, t) dy dt \\ &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \operatorname{div}(v_\varepsilon f)(y, t) dy dt. \end{aligned}$$

Inoltre notiamo che

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) f(x) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) dx &= - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(vf)(x, t) \varphi_\varepsilon(x - y) dx \\ &= - \operatorname{div}(vf)_\varepsilon(y, t). \end{aligned}$$

Sostituendo tali identità otteniamo

$$\begin{aligned} A &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) [\operatorname{div}(v_\varepsilon f)(y, t) - \operatorname{div}(vf)_\varepsilon(y, t)] dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \left[v_\varepsilon(y, t) \operatorname{div} f(y) + f(y) \cdot \nabla v_\varepsilon(y, t) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(vf)(x, t) \varphi_\varepsilon(y - x) dx \right] dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \left[\int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) \varphi_\varepsilon(y - x) \operatorname{div} f(y) dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \cdot v(x, t) \nabla \varphi_\varepsilon(y - x) dx - \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) f(x) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(y - x) dx \right] dy dt \\ &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \int_{\mathbb{R}^n} v(x, t) [(f(y) - f(x)) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(y - x) \\ &\quad + \varphi_\varepsilon(y - x) \operatorname{div} f(y)] dx dy dt, \end{aligned}$$

confrontando questo risultato con (2.9) si può concludere che (2.7) è vera.

Ora vogliamo dimostrare (2.8).

Come prima cosa osserviamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) \operatorname{div} f(y) \varphi_\varepsilon(x - y) dy = u(x, t) \operatorname{div} f(x)$$

in $L^1(0, T; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$, perché $u \operatorname{div} f \in L^1(0, T; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$.

È quindi sufficiente dimostrare che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) (f(y) - f(x)) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) dy = u(x, t) \operatorname{div} f(x) \quad (2.11)$$

in $L^1(0, T; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$.

Consideriamo la seguente forma bilineare in u e f

$$\Delta_\varepsilon[u, f](x, t) := \int_{\mathbb{R}^n} u(y, t) (f(y) - f(x)) \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(x - y) dy.$$

La conclusione della dimostrazione si sviluppa in 3 punti. Inizialmente dimostriamo la convergenza nel caso regolare. Successivamente otteniamo una stima uniforme in ε usando disuguaglianze integrali, in modo da avere il controllo necessario per il passaggio al limite. Infine deduciamo la convergenza del caso generale tramite approssimazione con funzioni regolari.

Punto 1: Verifichiamo che se u e f sono funzioni di classe C^1 , allora la convergenza in (2.11) è puntuale. Infatti,

$$\Delta_\varepsilon[u, f](x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div}(u(y, t)(f(y) - f(x))) \varphi_\varepsilon(x - y) dy,$$

per cui

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Delta_\varepsilon[u, f](x, t) = \operatorname{div}(u(x, t)f(x)) - f(x) \cdot \nabla u(x, t) = u(x, t) \operatorname{div} f(x).$$

Poiché u e f sono di classe C^1 , la convergenza è anche in $L^1(0, T; L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))$.

Punto 2: Sia $0 < \varepsilon < 1$, dalla disuguaglianza di Hölder si trova

$$\begin{aligned} & \int_{B_r} |\Delta_\varepsilon[u, f](x, t)| dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(y, t)| \left(\int_{B_r} |f(y) - f(x)| |\nabla \varphi_\varepsilon(x - y)| dx \right) dy \\ & \leq \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{B_r} |f(y) - f(x)| |\nabla \varphi_\varepsilon(x - y)| dx \right)^q dy \right)^{1/q} \\ & \leq \frac{\|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\nabla \varphi\|_\infty}{\varepsilon^{n+1}} \left(\int_{B_{r+1}} \left(\int_{|x-y|<\varepsilon} |f(y) - f(x)| dx \right)^q dy \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Dove nell'ultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che se $\operatorname{supp} \varphi \subseteq \overline{B}_1$, allora $\operatorname{supp} \varphi_\varepsilon(\cdot - y) \subseteq \overline{B}_\varepsilon(y)$. Dunque se $x \in B_r$ e y è tale che $|x - y| < \varepsilon < 1$, abbiamo $|y| < \varepsilon + |x| < r + 1$, perciò $y \in B_{r+1}$.

Applicando la disuguaglianza di Minkowski

$$\begin{aligned} & \left(\int_{B_{r+1}} \left(\int_{|x-y|<\varepsilon} \frac{|f(y) - f(x)|}{\varepsilon} dx \right)^q dy \right)^{1/q} \\ & = \left(\int_{B_{r+1}} \left(\int_{|z|<1} \varepsilon^n \frac{|f(y) - f(y + \varepsilon z)|}{\varepsilon} dz \right)^q dy \right)^{1/q} \\ & \leq \varepsilon^n \left(\int_{B_{r+1}} \left(\int_{|z|<1} \int_0^1 |\nabla f(y + t\varepsilon z)| dt dz \right)^q dy \right)^{1/q} \\ & \leq \varepsilon^n \int_{|z|<1} \int_0^1 \left(\int_{B_{r+1}} |\nabla f(y + t\varepsilon z)|^q dy \right)^{1/q} dt dz \\ & \leq \omega_n \varepsilon^n \left(\int_{B_{r+2}} |\nabla f(x)|^q dx \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ricaviamo la seguente stima

$$\int_{B_r} |\Delta_\varepsilon[u, f](x, t)| dx \leq \omega_n \|\nabla \varphi\|_\infty \|u(\cdot, t)\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\nabla f\|_{L^q(B_{r+2})}. \quad (2.12)$$

Questi passaggi sono rigorosi se f è di classe C^1 e, in particolare, la stima (2.12) è valida per $f \in W^{1,q}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Punto 3: Dato $\sigma > 0$, siano $u^{(\sigma)}$ e $f^{(\sigma)}$ funzioni di classe C^1 tali che:

- i) $\|u^{(\sigma)}\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))} \leq \|u\|_{L^\infty(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))}$ e $\|u^{(\sigma)} - u\|_{L^p((0,T);\mathbb{R}^n)} \leq \sigma$
- ii) $\|\nabla f^{(\sigma)}\|_{L^q(B_{r+2})} \leq \|\nabla f\|_{L^q(B_{r+2})}$ e $\|\nabla f^{(\sigma)} - \nabla f\|_{L^q(B_{r+2})} \leq \sigma$
- iii) $\|u^{(\sigma)} \operatorname{div} f^{(\sigma)} - u \operatorname{div} f\|_{L^1(0,T;L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n))} \leq \sigma$.

Troviamo

$$\begin{aligned}
\|\Delta_\varepsilon[u, f] - u \operatorname{div} f\| &\leq \|\Delta_\varepsilon[u - u^{(\sigma)}, f]\| + \|\Delta_\varepsilon[u^{(\sigma)}, f - f^{(\sigma)}]\| + \\
&\quad + \|\Delta_\varepsilon[u^{(\sigma)}, f^{(\sigma)}] - u^{(\sigma)} \operatorname{div} f^{(\sigma)}\| + \|u^{(\sigma)} \operatorname{div} f^{(\sigma)} - u \operatorname{div} f\| \\
&\leq C\sigma + \|\Delta_\varepsilon[u^{(\sigma)}, f^{(\sigma)}] - u^{(\sigma)} \operatorname{div} f^{(\sigma)}\|,
\end{aligned}$$

dove C è una costante indipendente da ε e con $\|\cdot\|$ abbiamo indicato la norma coerente con lo spazio in cui l'oggetto considerato è definito. Possiamo concludere per l'arbitrarietà di $\sigma > 0$ e perché dal punto 1 abbiamo che

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\Delta_\varepsilon(u^{(\sigma)}, f^{(\sigma)}) - u^{(\sigma)} \operatorname{div} f^{(\sigma)}\| = 0$$

poiché $u^{(\sigma)}$ e $f^{(\sigma)}$ sono funzioni di classe C^1 .

□

Capitolo 3

Unicità di soluzioni deboli

Come abbiamo osservato nel capitolo precedente, gli argomenti di compattezza debole* del Teorema di esistenza di soluzioni deboli non garantiscono l'unicità della soluzione. Per avere l'unicità della soluzione debole dobbiamo aggiungere un'ipotesi legata alle derivate del campo f . In seguito vedremo con un controesempio che senza un controllo sulle derivate prime di f potrebbe venire a mancare l'unicità.

3.1 Teorema di unicità di soluzioni deboli

Nelle ipotesi del Teorema di unicità, oltre alla condizione già discussa sulla divergenza di f appartenente a L^∞ , introduciamo ulteriori restrizioni sia sulla regolarità che sulla crescita del campo f .

In particolare, richiediamo che f sia nello spazio di Sobolev $W_{loc}^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ per un qualche $q \in [1, +\infty]$, così da garantire una sufficiente regolarità anche per le derivate. Per quanto riguarda la crescita di f , imponiamo la condizione:

$$\frac{|f(x)|}{1+|x|} \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

che assicura che il campo f cresca al più linearmente all'infinito. Una funzione $h(x)$ appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n)$ se h può essere scritta come somma di due funzioni $h_1(x)$ e $h_2(x)$ con $h_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $h_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 3.1.1 (Unicità). *Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ esponenti coniugati. Sia $f \in W_{loc}^{1,q}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ uno spazio vettoriale tale che $\operatorname{div} f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\frac{|f(x)|}{1+|x|} \in L^1(\mathbb{R}^n) + L^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Se $u \in L^\infty(0, T; L^p(\mathbb{R}^n))$ è soluzione debole del Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \nabla u \cdot f = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, T), \\ u(x, 0) = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

allora $u = 0$.

Dimostrazione. Sia $u_\varepsilon = u * \varphi_\varepsilon$ un'approssimazione di u tramite prodotto di convoluzione con un mollificatore. Sia $\beta(t) = \min\{|t|^p, M\}$, $t \in \mathbb{R}$, dove $M > 0$ è una costante fissata. $\beta \in \text{Lip}(\mathbb{R})$ è limitata e non negativa.

Dato che u_ε è soluzione dell'equazione (2.6), allora $\beta(u_\varepsilon)$ è una soluzione distribuzionale di

$$\partial_t \beta(u_\varepsilon) + \nabla \beta(u_\varepsilon) \cdot f = \beta'(u_\varepsilon) R_\varepsilon, \quad (3.1)$$

dove R_ε ha la forma (2.7) e, in particolare, vale (2.8).

Poiché β' è limitata, passando al limite per ε che tende a 0 in (3.1), deduciamo che $\beta(u)$ è una soluzione distribuzionale dell'equazione differenziale

$$\partial_t \beta(u) + \nabla \beta(u) \cdot f = 0.$$

Sia v una funzione test della forma $v(x, t) = \psi(t) \rho_r(x)$, $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, dove $\psi \in C_c^1(0, T)$ e $\rho_r \in C^1(\mathbb{R}^n)$ è tale che $\rho_r(x) = 1$ per $|x| \leq r$, $\rho_r(x) = 0$ per $|x| \geq 2r$ e $|\nabla \rho_r| \leq 2/r$, $r > 0$.

Usando tale funzione test, ricaviamo

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t \beta(u(x, t)) \psi(t) \rho_r(x) dx dt &= - \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \psi(t) \rho_r(x) \nabla \beta(u(x, t)) \cdot f(x) dx dt \\ &- \int_0^T \psi'(t) \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) \rho_r(x) dx dt = \int_0^T \psi(t) \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) \text{div}(\rho_r(x) f(x)) dx dt. \end{aligned}$$

Osserviamo che la funzione

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) \rho_r(x) dx$$

è continua in $[0, T]$, che è compatto, dunque è assolutamente continua. Infatti:

$$|\beta(u(x, t)) \rho_r(x)| \leq M \rho_r(x) \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{per ogni } t \in [0, T], x \in \mathbb{R}^n.$$

Possiamo dedurne la continuità per convergenza dominata. Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) \rho_r(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) \text{div}(\rho_r(x) f(x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) (\rho_r(x) \text{div} f(x) + \nabla \rho_r(x) \cdot f(x)) dx \\ &\leq \|\text{div} f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(\cdot, t)) \rho_r(x) dx + \frac{2}{r} \int_{r \leq |x| \leq 2r} \beta(u(\cdot, t)) |f| dx. \end{aligned}$$

Inoltre per $r \geq 1$,

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \int_{r \leq |x| \leq 2r} \beta(u(x, t)) |f(x)| dx &\leq 6 \int_{|x| \geq r} \frac{|f(x)|}{1 + |x|} \beta(u(x, t)) dx \\ &\leq 6 \int_{|x| \geq r} g_1 \beta(u) dx + 6 \int_{|x| \geq r} g_2 \beta(u) dx, \end{aligned}$$

dove $g_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g_2 \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ per ipotesi.
Poiché $\beta(u(\cdot, t)) \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{|x| \geq R} g_1 \beta(u) dx < \infty \quad \text{e} \quad \int_{|x| \geq R} g_2 \beta(u) dx < \infty.$$

Dunque si può passare al limite per $r \rightarrow \infty$ e otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, t)) dx \leq \|\operatorname{div} f\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \beta(u(x, s)) dx ds.$$

Con $M \rightarrow \infty$ troviamo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx \leq \|\operatorname{div} f\|_\infty \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |u(x, s)|^p dx ds.$$

Imponendo la condizione iniziale $u(x, 0) = 0$, ovvero

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, 0)|^p dx = 0,$$

deduciamo che

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x, t)|^p dx = 0 \quad \text{per ogni } t \in [0, T],$$

e possiamo quindi concludere che $u = 0$. □

3.2 Controesempio

L'obiettivo di questo esempio è mostrare che senza un opportuno controllo sulle derivate di f allora l'unicità delle soluzioni deboli per l'Equazione di Trasporto non è più garantita.

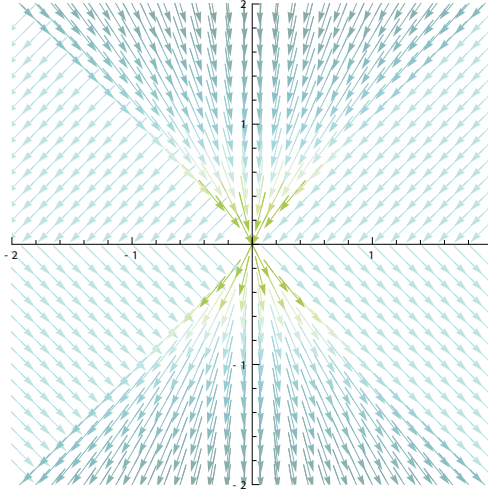
Mostreremo un esempio scoperto da Di Perna e Lyons di un campo vettoriale $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tale che $\operatorname{div} f = 0$ in senso distribuzionale e $f \notin W_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$ per cui esistono due flussi distinti che risolvono l'ODE associata.

Ricordiamo che se un campo vettoriale $f = (f_1, f_2)$ ha divergenza nulla, allora esiste una funzione scalare $H(x)$, chiamata Hamiltoniana, tale che:

$$f_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_2}, \quad f_2 = \frac{\partial H}{\partial x_1}.$$

Quindi per definire f definiamo prima la seguente Hamiltoniana:

$$H(x) = \begin{cases} -\frac{x_1}{|x_2|}, & \text{se } |x_1| \leq |x_2|, \\ -(x_1 - |x_2| + 1), & \text{se } x_1 > |x_2|, \\ -(x_1 + |x_2| + 1), & \text{se } x_1 < -|x_2|. \end{cases} \quad \text{per } x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Figura 3.1: Rappresentazione del campo vettoriale f .

Definiamo $f = (f_1, f_2)$ come il campo Hamiltoniano associato ad H e precisamente:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\operatorname{sgn}(x_2) \left\{ \frac{x_1}{|x_2|^2} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}} + \chi_{\{|x_1| > |x_2|\}} \right\}, \\ f_2(x) &= \frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{1}{|x_2|} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}} - \chi_{\{|x_1| > |x_2|\}}. \end{aligned}$$

Osserviamo che $\operatorname{div} f = 0$, $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) + L^\infty(\mathbb{R}^2)$ e $f \notin W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Infatti se $x \in \mathbb{R}^2$ è un punto regolare per f abbiamo:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f(x) &= \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \\ &= -\operatorname{sgn}(x_2) \cdot \frac{1}{|x_2|^2} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}} + \operatorname{sgn}(x_2) \cdot \frac{1}{|x_2|^2} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dimostriamo ora che $\operatorname{div} f = 0$ in senso distribuzionale. Sia $\phi \in C_c^\infty$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \nabla \phi(x) \cdot f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\partial_{x_1} \phi(x) (-\operatorname{sgn}(x_2)) \left(\frac{x_1}{|x_2|^2} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}}(x) + \chi_{\{|x_1| > |x_2|\}}(x) \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_{x_2} \phi(x) \left(-\frac{1}{|x_2|} \chi_{\{|x_1| \leq |x_2|\}}(x) - \chi_{\{|x_1| > |x_2|\}}(x) \right) \right] dx \\ &= \int_{\{|x_1| \leq |x_2|\}} \left(-\partial_{x_1} \phi(x) \operatorname{sgn}(x_2) \frac{x_1}{|x_2|^2} - \partial_{x_2} \phi(x) \frac{1}{|x_2|} \right) dx \\ &\quad + \int_{\{|x_1| > |x_2|\}} (-\partial_{x_1} \phi(x) \operatorname{sgn}(x_2) - \partial_{x_2} \phi(x)) dx. \end{aligned}$$

Integrando per parti e indicando con $n = (n_1, n_2)$ la normale uscente dal bordo di $\{|x_1| \leq |x_2|\}$ otteniamo:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \nabla \phi(x) \cdot f(x) dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \operatorname{div} f(x) dx \\
&\quad - \int_{\partial\{|x_1| \leq |x_2|\}} \phi(x) \left(\operatorname{sgn}(x_2) \frac{x_1}{|x_2|^2} n_1 + \frac{1}{|x_2|} n_2 \right) ds \\
&\quad - \int_{\partial\{|x_1| > |x_2|\}} \phi(x) (\operatorname{sgn}(x_2)(-n_1) + 1(-n_2)) ds \\
&= - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \operatorname{div} f(x) dx - \int_{\{|x_1|=|x_2|\}} \phi(x) \left(\operatorname{sgn}(x_2) \frac{x_1}{|x_2|^2} n_1 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{|x_2|} n_2 - \operatorname{sgn}(x_2) n_1 - n_2 \right) ds \\
&= - \int_{\mathbb{R}^2} \phi(x) \operatorname{div} f(x) dx \\
&\quad - \int_{\{|x_1|=|x_2|\}} \phi(x) (\operatorname{sgn}(x_2) \operatorname{sgn}(x_1) n_1 + n_2) \left(\frac{1}{|x_2|} - 1 \right) ds.
\end{aligned}$$

Calcolando la normale n su ciascun quadrante del piano è facile dimostrare che

$$\operatorname{sgn}(x_2) \operatorname{sgn}(x_1) n_1 + n_2 = 0.$$

Possiamo quindi concludere che $\operatorname{div} f = 0$ in senso distribuzionale.

Dato il punto iniziale $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ vogliamo definire due flussi Φ^1 e Φ^2 che siano definiti q.o., perciò possiamo limitarci all'insieme

$$I = \{x^0 \in \mathbb{R}^2 : x_1^0 \neq 0, x_2^0 \neq 0, |x_1^0| \neq |x_2^0|\}$$

nel quale il campo f non ha singolarità o discontinuità.

Per le simmetrie del problema possiamo definire Φ^1 e Φ^2 in

$$Q = \{x^0 \in \mathbb{R}^2 : x_1^0 > 0, x_2^0 > 0, x_1^0 \neq x_2^0\}.$$

Distinguiamo i seguenti due casi.

Se $x_1^0 > x_2^0$, si ha $\Phi^1 = \Phi^2$ definite nel seguente modo:

$$\begin{cases} \Phi_1^1 = \Phi_1^2 = x_1^0 - t, & \text{se } t \leq x_2^0, \\ \Phi_1^1 = \Phi_1^2 = x_1^0 - 2x_2^0 + t, & \text{se } t > x_2^0, \\ \Phi_2^1 = \Phi_2^2 = x_2^0 - t. \end{cases}$$

Se $x_1^0 < x_2^0$, siano:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_1^1 = \frac{x_1^0}{x_2^0} |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \Phi_2^1 = |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \text{se } t \leq \frac{1}{2}(x_2^0)^2, \\ \Phi_1^1 = \frac{x_1^0}{x_2^0} |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \Phi_2^1 = -|(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \text{se } t > \frac{1}{2}(x_2^0)^2, \\ \Phi_1^2 = \frac{x_1^0}{x_2^0} |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \Phi_2^2 = |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \text{se } t \leq \frac{1}{2}(x_2^0)^2, \\ \Phi_1^2 = -\frac{x_1^0}{x_2^0} |(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \Phi_2^2 = -|(x_2^0)^2 - 2t|^{1/2}, & \text{se } t > \frac{1}{2}(x_2^0)^2. \end{array} \right.$$

Notiamo che, in entrambi i casi, Φ^1 e Φ^2 sono continui in t , appartengono a $W^{1,1}(-T, T)$ $T < \infty$ e risolvono l'equazione differenziale ordinaria associata a f per ogni t eccetto per $t = x_2^0$ se $x_1^0 > x_2^0$ e per $t = \frac{1}{2}(x_2^0)^2$ se $x_1^0 < x_2^0$. Inoltre, per $i = 1, 2$, $f(\Phi^i(t))$ è continua in t eccetto per un valore, appartiene a $L^1(-T, T)$ per ogni $T < \infty$ e vale

$$\sup_{t \in [-T, T]} |\Phi^i(t, x)| \leq C_T(1 + |x|) \quad \text{per ogni } T < \infty, x \in I.$$

Sottolineiamo che i flussi Φ^1 e Φ^2 preservano la misura di Lebesgue poiché $\text{div} f = 0$. Tali proprietà implicano che, per ogni $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $u^i(t, x) = g(\Phi^i(t, x))$ soddisfa per $i = 1, 2$ il Problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t^i - f \cdot \nabla u^i = 0, & \text{su } \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, \\ u^i(0, x) = g(x), & \text{su } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Quindi abbiamo trovato che l'equazione di trasporto per il campo $-f \notin W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ ha due soluzioni distinte. È necessario dunque un controllo sulle derivate di f per ottenere l'unicità della soluzione debole.

Bibliografia

- [1] Roberto Monti. *Introduction to ordinary differential equations*. Dispense online, 2010.
- [2] DiPerna, R. J, and P. L Lions. *Ordinary Differential Equations, Transport Theory and Sobolev Spaces, in “Inventiones Mathematicae.”* Volume 98, Number 3., 1989.
- [3] Evans, Lawrence C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, 1998.
- [4] Evans, Lawrence C, and Ronald F Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. Revised edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 2015.
- [5] Brezis, Haim. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer, 2011.
- [6] Folland, Gerald B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. ed. New York [etc: J. Wiley, 1999.
- [7] Roberto Monti. *Analisi Matematica 2, parte A e parte B*. Dispense online, 2023.