Universitá degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA TULLIO LEVI-CIVITA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di Laurea triennale

Due dimostrazioni della disuguaglianza di Brunn-Minkowski a confronto - Comparison between two proofs of the Brunn-Minkowski inequality

Candidato:
Lorenzo Guerini
Matricola 2040976

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Anno Accademico 2023/2024
20/09/2024

Indice

Introduzione **3**

1 Dimostrazione classica **5**
- 1.1 Disuguaglianza di Brunn-Minkowski 5
- 1.2 Caso generale: insiemi non misurabili 7

2 Dimostrazione con la Teoria del Trasporto Ottimo **9**
- 2.1 Problema di Monge 9
- 2.2 Entropia di Rényi e proprietà MCn 11
- 2.3 La convessità dell'energia interna 12
- 2.4 Dimostrazione alternativa della disuguaglianza di Brunn-Minkowski 15

Bibliografia **17**

Introduzione

Questo elaborato si occupa di mettere a confronto due dimostrazioni della disuguaglianza di Brunn-Minkowski, sviluppata da Herman Brunn in [2] ed Herman Minkowski in [7].

La prima dimostrazione trattata è quella considerata classica, tratta in [4], che utilizza tecniche di Analisi Reale. Essa arriva al risultato gradualmente, osservando dapprima il caso dei plurintervalli di $\mathbb{R}^n$ che si dimostra grazie alla disuguaglianza tra media geometrica ed aritmetica. Il risultato poi si estende agli insiemi compatti, ai Lebesgue misurabili e a tutti gli altri.

Una strada alternativa, percorsa dalla seconda dimostrazione riportata, è basata sulla teoria del Trasporto Ottimo. Nello specifico si mostra la convessità del funzionale energia interna lungo una geodetica di $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$, cioè le misure di Borel unitarie con secondo momento finito. L'utilizzo dell'entropia di Rényi, energia interna associata ad una particolare densità di energia, consente di dimostrare una disuguaglianza più generale, la quale per un parametro specifico è la disuguaglianza di Brunn-Minkowski. Ancora la disuguaglianza tra medie geometrica ed aritmetica è di cruciale importanza per un lemma che dimostra la convessità dell'energia interna.

Oggi la ricerca è attiva nello sviluppo di risultati quantitativi che generalizzano la disuguaglianza di Brunn-Minkowski. Per esempio in [5] Alessio Figalli e David S. Jerison dimostrano che la differenza tra la misura di due insiemi e del loro inviluppo convesso è limitata da una costante.

Per i teoremi e le definizioni inerenti l'Analisi Reale si fa riferimento a [3], [4] e [6], per le dimostrazioni di lemmi e teoremi inerenti il Trasporto ottimo e lo sviluppo della tesi si fa riferimento al Capitolo 15 di [1] e alle dispense del corso *Teoria del Trasporto ottimo ed elementi di Analisi superiore* del Prof. Roberto Monti [8].

Capitolo 1

Dimostrazione classica

In questo primo capitolo si enuncia il teorema di Brunn-Minkowski e se ne dà una dimostrazione classica (da [4, pp. 277-278]), che consiste nell'applicazione della disuguaglianza tra media geometrica e aritmetica. Si studia prima il caso di sottoinsiemi Lebesgue misurabili di $\mathbb{R}^n$ e poi si estende il risultato ai non misurabili. Con $\mathscr{L}^n$ ci si riferirà sempre alla misura, esterna, di Lebesgue su $\mathbb{R}^n$.

1.1 Disuguaglianza di Brunn-Minkowski

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Brunn-Minkowski) *Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ non vuoti allora*

$$\mathscr{L}^n(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \mathscr{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}} \tag{1.1}$$

dove $A + B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}$.

Dimostrazione. Ci si riduce prima al caso dei plurintervalli di $\mathbb{R}^n$:

$$F = \left\{ \bigotimes_{j=1}^{n} P_j \mid P_j \text{ intervallo aperto limitato di } \mathbb{R} \text{ non vuoto } \forall j = 1 \dots n \right\}.$$

Se $A = P_1 \times \cdots \times P_n \in F$ e $B = Q_1 \times \cdots \times Q_n \in F$ allora $A+B = (P_1+Q_1) \times \cdots \times (P_n+Q_n)$ e si definiscono

$$u_j = \frac{\mathscr{L}^1(P_j)}{\mathscr{L}^1(P_j + Q_j)}, \quad v_j = \frac{\mathscr{L}^1(Q_j)}{\mathscr{L}^1(P_j + Q_j)}, \quad j = 1 \dots n,$$

da cui, per la definizione di misura prodotto sui plurintervalli,

$$\frac{\mathscr{L}^n(A)}{\mathscr{L}^n(A+B)} = \prod_{j=1}^{n} u_j, \quad \frac{\mathscr{L}^n(B)}{\mathscr{L}^n(A+B)} = \prod_{j=1}^{n} v_j.$$

Si ottiene così, applicando in $*$ la disuguaglianza tra medie geometrica e aritmetica

$$[\mathscr{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}]\mathscr{L}^n(A+B)^{-\frac{1}{n}} = \prod_{j=1}^{n} u_j^{\frac{1}{n}} + \prod_{j=1}^{n} v_j^{\frac{1}{n}} \overset{*}{\leq} \sum_{j=1}^{n} \frac{u_j}{n} + \sum_{j=1}^{n} \frac{v_j}{n} = 1.$$

Si studia ora il caso in cui $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ sono unioni finite di plurintervalli. Siano $G, H \subseteq F$ famiglie non vuote, finite, di plurintervalli a due a due disgiunti e siano

$$A = \bigcup_{U \in G} U, \quad B = \bigcup_{V \in H} V.$$

Si procede per induzione su $|G| + |H|$, dove $| \cdot |$ indica la cardinalità di un insieme. Il caso base corrispondente a $|G| + |H| = 2$ è appena stato mostrato. Si suppone quindi $|G| \geq 1$ e che il teorema sia vero per famiglie $\bar{G}$,$\bar{H}$ di plurintervalli a due a due disgiunti con $|\bar{G}| + |\bar{H}| < |G| + |H|$.

Si considerano $i \in \{1 \dots n\}$ ed $a \in \mathbb{R}$ tali che ciascuno dei due insiemi

$$A_1 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < a\}, \quad A_2 = A \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > a\}$$

contenga membri di G, scelta possibile perchè gli $U \in G$ sono a due a due disgiunti. Si prende poi $b \in \mathbb{R}$ tale che gli insiemi

$$B_1 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < b\}, \quad B_2 = B \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i < b\}$$

soddisfino

$$\frac{\mathscr{L}^n(A_k)}{\mathscr{L}^n(A)} = \frac{\mathscr{L}^n(B_k)}{\mathscr{L}^n(B)}, \qquad k = 1, 2.$$

Siano poi

$$G_k = \{U \cap A_k \mid U \in G, U \cap A_k \neq \emptyset\}, \;\; H_k = \{V \cap B_k \mid U \in G, U \cap B_k \neq \emptyset\} \quad k = 1, 2$$

$$A_k = \bigcup_{\bar{U} \in G_k} \bar{U}, \;\; B_k = \bigcup_{\bar{V} \in H_k} \bar{V}.$$

Ricordando che G_1, G_2 contengono ciascuno almeno un elemento di G, e che ciò non è assicurato per H_1, H_2 rispettivamente ad H, si trovano allora

$$|G_k| < |G|, \quad |H_k| \leq |H|, \quad k = 1, 2.$$

Inoltre $A_1 + B_1$ e $A_2 + B_2$ sono separati dall'iperpiano $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = a + b\}$.

Grazie a queste considerazioni si può applicare il passo induttivo:

$$\begin{aligned}
&\mathscr{L}^n(A + B) = && (a)\\
&\mathscr{L}^n(A_1 + B_1) + \mathscr{L}^n(A_2 + B_2) \geq && (b)\\
&[\mathscr{L}^n(A_1)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B_1)^{\frac{1}{n}}]^n + [\mathscr{L}^n(A_2)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B_2)^{\frac{1}{n}}]^n \geq && (c)\\
&[\mathscr{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}]^n.
\end{aligned}$$

In (a) si applica la finita additività della misura, in (b) si applica il passo induttivo, essendo gli A_k e B_k unioni di elementi di famiglie G_k, H_k con $|G_k| + |H_k| < |G| + |H|$ $(k = 1, 2)$. Infine (c) è un risultato dimostrabile a sua volta per induzione. Quindi il teorema vale per unioni finite di plurintervalli.

Prendendo ora $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ compatti, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $\{A_i\}_{i=1\ldots k}, \{B_i\}_{i=1\ldots k} \subseteq F$ tali che

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} A_i,\ B \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B_i \quad \text{e} \quad \mathscr{L}^n(A+B) \geq \mathscr{L}^n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i + \bigcup_{i=1}^{k} B_i) - \epsilon.$$

Si ottiene

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}} &\leq \mathscr{L}^n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(\bigcup_{i=1}^{k} B_i)^{\frac{1}{n}} \\ &\overset{(1.1)}{\leq} \mathscr{L}^n(\bigcup_{i=1}^{k} A_i + \bigcup_{i=1}^{k} B_i)^{\frac{1}{n}} \leq (\mathscr{L}^n(A+B) + \epsilon)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ, che può così tendere a zero, si è dimostrata la (1.1) per i compatti.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ misurabili. Per il *Teorema di regolarità e struttura* degli insiemi $\mathscr{L}^n$-misurabili, per ogni $\epsilon > 0$ esistono $A_\epsilon \subseteq A$, $B_\epsilon \subseteq B$ compatti con

$$\mathscr{L}^n(A) \leq \mathscr{L}^n(A_\epsilon) + \epsilon,\ \mathscr{L}^n(B) \leq \mathscr{L}^n(B_\epsilon) + \epsilon.$$

Poichè inoltre $A + B \supseteq A_\epsilon + B_\epsilon$,

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^n(A+B)^{\frac{1}{n}} &\geq \mathscr{L}^n(A_\epsilon + B_\epsilon)^{\frac{1}{n}} \\ &\overset{(1.1)}{\geq} \mathscr{L}^n(A_\epsilon)^{\frac{1}{n}} + \mathscr{L}^n(B_\epsilon)^{\frac{1}{n}} \geq (\mathscr{L}^n(A) - \epsilon)^{\frac{1}{n}} + (\mathscr{L}^n(B) - \epsilon)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Per l'arbitrarietà di ϵ si conclude che la (1.1) è valida per tutti gli $\mathscr{L}^n$-misurabili. $\square$

1.2 Caso generale: insiemi non misurabili

Si vuole estendere la disuguaglianza di Brunn-Minkowski al caso di sottoinsiemi non misurabili di $\mathbb{R}^n$: per farlo si associa ad ogni insieme il suo *guscio*.

Definizione 1.1 (Hull, guscio)**.** Sia (X, μ) spazio misurabile e $A \subseteq X$, diciamo che B è *guscio* (hull) di A se e solo se B è misurabile, $A \subseteq B \subseteq X$ e $\mu^*(T \cap A) = \mu(T \cap B)$ per ogni T misurabile, dove μ^* è la misura esterna associata a μ.

Si evidenzia che se A è misurabile allora coincide col suo guscio B e che $\mu^*(A) = \mu(B)$.

Da [4, pp. 56], nel caso in cui $X = \mathbb{R}^n$ e $\mu = \mathscr{L}^n$ il guscio di $S \subseteq \mathbb{R}^n$ si caratterizza quindi nel modo seguente

$$S^* = \mathbb{R}^n \cap \big\{x \mid \lim_{r \to 0} \mathscr{L}^n(S \cap B(x,r))/\alpha(n)r^n = 1\big\}, \tag{1.4}$$

dove $\alpha(n)r^n$ è la misura della palla di raggio r in dimensione n.

Dati $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ anche non misurabili, vale la disuguaglianza di Brunn-Minkowski applicata ai rispettivi $\mathscr{L}^n$-gusci.

Capitolo 2

Dimostrazione con la Teoria del Trasporto Ottimo

Centrale per lo sviluppo di questo capitolo è la Teoria del Trasporto Ottimo che si occupa di problemi di minimizzazione relativamente al costo di trasporto di una massa fissata. Questo tipo di problema trova una sua formulazione in teoria della misura nei problemi di Monge e di Kantorovic.

L'obiettivo è mostrare la convessità del funzionale energia interna, cioè che essa è convessa lungo una geodetica di $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$, proprietà detta *Displacement convexity.* Per farlo si enuncia un teorema che garantisce esistenza ed unicità della soluzione al problema di Monge e si trattano lemmi utili a dimostrare che l'energia interna è displacement convessa.

Considerando poi il caso specifico dell'entropia di Rényi è possibile dimostrare una disuguaglianza generale sulla misura di combinazioni lineari di insiemi di $\mathbb{R}^n$ da cui si deduce la disuguaglianza di Brunn-Minkowski per un valore specifico del parametro t nella formula.

2.1 Problema di Monge

Il problema di Monge é un punto di partenza per la teoria del Trasporto ottimo. Assieme ad una sua breve formulazione si riporta qui il teorema di Brenier, Knott-Smith che garantisce esistenza ed unicità della soluzione al problema sotto alcune ipotesi.

Definizione 2.1 (Insieme delle mappe di trasporto)**.** Siano $(X, \mathscr{A}), (Y, \mathscr{B})$ spazi topologici e μ, ν misure di Borel unitarie rispettivamente su X e Y. L'insieme delle mappe di trasporto è

$$\mathscr{T}(\mu, \nu) = \{T : X \to Y |\ T \text{ è di Borel e } T_{\#}\mu = \nu\}$$

dove $T_{\#}\mu$ è la misura push forward push forward di μ tramite T

$$T_{\#}\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)) \ \ \forall B \in \mathscr{B}.$$

Definizione 2.2 (Funzionale di costo)**.** Siano X, Y come nella definizione (2.1). Fissata una funzione continua $c : X \times Y \to [0, +\infty)$ detta di costo, si ha che $x \mapsto c(x, T(x))$ è Boreliana se T è Boreliana. Si definisce il funzionale di costo $C : \mathscr{T}(\mu, \nu) \to [0, +\infty)$

$$C(T) = \int_X c(x, T(x)) d\mu.$$

Il **problema di Monge** consiste nella ricerca del minimo valore del funzionale di costo a variare della mappa di trasporto, cioè

$$\min \big\{ C(T) \mid T \in \mathscr{T}(\mu, \nu) \big\}.$$

In generale non sono garantite esistenza ed unicità del minimo. Un caso favorevole è quello in cui $X = Y = \mathbb{R}^n$, μ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e $c = \frac{1}{2} |x - y|^2$.

L'ambiente in cui questo capitolo si sviluppa è l'insieme di misure di Borel su $\mathbb{R}^n$ unitarie e con secondo momento finito:

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n) = \left\{ \mu \mid \mu \text{ misura di Borel su } \mathbb{R}^n \text{ con } \mu(\mathbb{R}^n) = 1 \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 \, d\mu < \infty \right\}.$$

In $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ il seguente teorema garantisce esistenza ed unicità della soluzione al problema di Monge e ne dà una caratterizzazione. É possibile dimostrarlo passando dalla verifica dell'esistenza e unicità della soluzione al problema di Kantorovic, che è una riformulazione del problema di Monge; si veda la dimostrazione del Teorema 5.2 di [1].

Teorema 2.1 (Brenier, Knott-Smith) *Siano $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mu, \nu \ll \mathscr{L}^n$.*

- *Il problema di Monge*

  $$\min \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 \, d\mu(x) \mid T \in \mathscr{T}(\mu, \nu) \right\}$$

  ha soluzione unica ed è della forma $T = \nabla \varphi$, dove $\varphi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ è una funzione convessa e differenziabile μ-q.o;

- *Sia $\varphi : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, semicontinua inferiormente tale che sia differenziabile μ-q.o. con $|\nabla \varphi| \in L^2(\mathbb{R}^n, \mu)$. Allora $T = \nabla \varphi$ è soluzione del problema di Monge fra μ e $\nu = T_{\#}\mu$;*

- *Sia anche $\nu \ll \mathscr{L}^n$ e $S \in \mathscr{T}(\mu, \nu)$ la soluzione del problema di Monge. Allora $S \circ T = Id$ μ-q.o. e $T \circ S = Id$ ν-q.o.*

2.2 Entropia di Rényi e proprietà MCn

Definizione 2.3 (Energia interna)**.** Sia data $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ di Borel, detta densità di energia. Si definisce l'energia interna $\mathscr{U} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ con

$$\mathscr{U}(\mu) = \begin{cases} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} U(\rho)dx & se\ \mu = \rho\mathscr{L}^n \\ +\infty & altrimenti \end{cases} \tag{2.1}$$

dove ρ è una funzione da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^+$.

É possibile porre delle ipotesi su U affinchè l'integrale all'interno della definizione di $\mathscr{U}$ sia ben definito come conseguenza del Teorema 15.8 di [1], il quale tratta la semicontinuità inferiore di $\mathscr{U}$. Questo si ottiene mostrando che è finito $\int_{\mathbb{R}^n} U^-(\rho)dx$, dove U^- è la parte negativa della densità di energia associata ad $\mathscr{U}$.

Definizione 2.4 (Entropia di Rényi)**.** L'energia interna associata alla densità di energia $U(s) = -s^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, definita su $\mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ come

$$\mathscr{U}(\mu) = -\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\alpha dx \tag{2.2}$$

dove $\mu = \rho\mathscr{L}^n + \mu^s$ è la decomposizione di Lebesgue-Radon-Nykodim di μ, si chiama Entropia di Rényi.

Si introduce ora la *proprietà MCn* con l'interesse di relazionarla all'energia interna, in particolare all'entropia di Rényi. Questo funzionale sarà utilizzato direttamente all'interno della dimostrazione della disuguaglianza di Brunn-Minkowski a fine capitolo.

Definizione 2.5 (Proprietà MCn)**.** Si dice che la densità di energia $U : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ verifica la *proprietà MCn*, $n \in \mathbb{N}$ se $s \mapsto s^n U(s^{-n})$, $s > 0$, è noncrescente e convessa. Si aggiunge come richiesta che $U(0) = 0$. *MC* sta per McCann.

Data la densità di energia $U(\rho) = -\rho^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $\Phi(s) = s^n U(s^{-n}) = -s^{n(1-\alpha)}$. Per $\alpha \leq 1$ Φ è decrescente. Inoltre

$$\Phi''(s) = -n(1-\alpha)[n(1-\alpha)-1]s^{n(1-\alpha)-2}$$
$$\Phi'' \geq 0 \Leftrightarrow n(1-\alpha) - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \alpha \geq 1 - \frac{1}{n}.$$

Dunque l'entropia di Rényi verifica MCn per $1 - \frac{1}{n} \leq \alpha \leq 1$.
Si osserva che se $n \geq 2$, la condizione $\alpha \geq 1 - \frac{1}{n}$ imposta per soddisfare MCn è più restrittiva di quella richiesta per la buona definizione dell'integrale $-\int_{\mathbb{R}^n} \rho^\alpha dx$.

2.3 La convessità dell'energia interna

Dimostrare che l'energia interna è convessa significa dimostrare che verifica la seguente proprietà.

Definizione 2.6 (Displacement convexity)**.** Sia $T = \nabla\varphi$ la soluzione del problema di Monge per $\mu, \nu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ tali che $\mu, \nu \ll \mathscr{L}^n$. Sia

$$\gamma(t) = ((1-t)Id + t\nabla\varphi)_{\#}\mu \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n), \quad t \in [0,1]$$

la geodetica da μ a ν relativa alla distanza di Wasserstein. L'energia interna $\mathscr{U}$ è *displacement convessa* se la funzione $t \mapsto \mathscr{U}(\gamma(t))$ è convessa.

Questo concetto di convessità si definisce quindi in relazione alla geodetica in $\mathscr{P}_2$ che collega le due misure μ, ν prese in questione, la quale per il Corollario 10.10 di [1] sappiamo essere unica.

Siano ora $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ con $\mu \ll \mathscr{L}^n$ e $T = \nabla\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la soluzione del problema di Monge caratterizzata dal Teorema 2.1. Si definiscono:

$$\begin{aligned}
&D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \in \mathbb{R}\}, \\
&D_0 = \{x \in D \mid H\varphi(x) \text{ esiste } q.o. \text{ nel senso del Teorema 6.9 di [3]}\}, \\
&\Sigma = \{x \in D_0 \mid \det H\varphi(x) = 0\}, \\
&\varphi_t(x) = (1-t)\frac{|x|^2}{2} + t\varphi \quad t \in [0,1).
\end{aligned}$$

Il Teorema 6.9 di [3] è il Teorema di Alexandrov che dà l'approssimazione puntuale di una funzione convessa da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$ scritta in termini del suo gradiente e della sua matrice Hessiana. Quindi D_0 è l'insieme dei punti di D per i quali φ si può approssimare *q.o.* nella forma del Teorema di Alexandrov con la sua Hessiana.
Queste definizioni rimarranno fissate per tutto il capitolo.

Lemma 2.2 *Sia $T_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definita come*

$$T_t := \nabla\varphi_t(x) = (1-t)x + tT(x), \ t \in [0,1).$$

Allora T_t è iniettiva su D_0, la misura $\mu_t = (T_t)_{\#}\mu_0$ è concentrata su $T_t(D_0)$ e inoltre se $\mu_0 = \rho_0\mathscr{L}^n$ allora $\mu_t = \rho_t\mathscr{L}^n$ con

$$\rho_t = \frac{\rho_0}{\det \nabla T_t} \circ T_t^{-1}, \ \ q.o. \ su \ T_t(D_0). \tag{2.3}$$

Dimostrazione. Dalla definizione di T_t

$$\begin{aligned}
\langle T_t(x) - T_t(y),\ x - y\rangle &= \langle (1-t)(x-y) + t(T(x) - T(y)),\ x-y\rangle \\
&= (1-t)\,|x-y|^2 + t\langle T(x) - T(y),\ x-y\rangle.
\end{aligned}$$

Siccome T è monotono, essendo gradiente di una funzione convessa, allora per $0 \leq t < 1$ si ha $t\langle T(x) - T(y),\ x - y\rangle \geq 0$ e quindi

$$|T_t(x) - T_t(y)| \geq (1-t)\,|x - y|\,.$$

Dunque per $t < 1$ la mappa $T_t : D_o \to T_t(D_0)$ è iniettiva e $T_t^{-1} : T_t(D_0) \to D_0$ è Lipschitziana con costante di Lipschitz $\mathscr{L}(T_t)^{-1} = \frac{1}{1-t}$.

Sia $A \subset T_t(D_0)$ boreliano con $\mathscr{L}^n(A) = 0$, allora $\mu_0(T_t^{-1}(A)) = 0$, essendo T_t^{-1} Lipschitziana e $\mu_0 \ll \mathscr{L}^n$. Così si deduce che

$$\mu_t(A) = (T_t)_{\#}\mu_0(A) = \mu_0(T_t^{-1}(A)) = 0.$$

In questo modo $\mu_t \ll \mathscr{L}^n$ e quindi, essendo μ_0 concentrata su D_0, μ_t lo è su $T_t(D_0)$.

Si vuole provare la (2.3) per $A \subset T_t(D_0)$ di Borel:

$$\begin{aligned}
\int_A \rho_t(x)dx &= \mu_t(A) = (T_t)_{\#}\mu_0(A) \\
&= \mu_0(T_t^{-1}(A)) = \int_{T_t^{-1}(A)} \rho_0(y)dy \\
&\overset{*1}{=} \int_A \rho_0(T_t^{-1}(x))\det(\nabla T_t^{-1}(x))dx \\
&\overset{*2}{=} \int_A \frac{\rho_0}{\det \nabla T_t} \circ T_t^{-1}(x)dx.
\end{aligned}$$

In $*_1$ si è utilizzata la formula del cambio di variabile $y = T_t^{-1}(x)$, che è valida per T_t^{-1} Lipschitziana, mentre in $*_2$ si è usato il fatto che $\det \nabla T_t \neq 0$. □

Si enuncia omettendone la dimostrazione (si veda il Corollario 7.2 di [1]) il seguente lemma.

Lemma 2.3 *Siano $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ con $\mu, \nu \ll \mathscr{L}^n$ e T_t come nel Lemma 2.2, allora*

- $T : D_0 \setminus \Sigma \to \mathbb{R}^n$ *è iniettiva;*
- $\mathscr{L}^n(T(\Sigma)) = 0$*;*
- *Se $\mu_0 = \rho_0\mathscr{L}^n$ e $\mu_1 = \rho_1\mathscr{L}^n$ allora vale la formula di Monge-Ampére*

$$\rho_1(\nabla\varphi)\det H\varphi = \rho_0 \ \ q.o.\ su\ D. \tag{2.4}$$

Sia poi $S_n^+(\mathbb{R}^n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^t,\ A \geq 0\}$ l'insieme delle matrici simmetriche semidefite positive, che è un insieme convesso. Il seguente risultato sulla concavità della funzione determinante si dimostra grazie alla disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica.

Lemma 2.4 *Sia $A \in S_n^+(\mathbb{R}^n)$, la funzione $A \mapsto \det(A)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$ è concava:*

$$\det(A+B)^{\frac{1}{n}} \geq \det(A)^{\frac{1}{n}} + \det(B)^{\frac{1}{n}}.$$

Dimostrazione. Senza perdere di generalità si può supporre $A > 0$. Infatti siano $A \geq 0$, poichè $S_n^+(\mathbb{R}^n)$ convesso e $\alpha I \in S_n^+(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha > 0$, $A_\epsilon = A + \epsilon I \in S_n^+(\mathbb{R}^n)$ e $A_\epsilon > 0$. Il risultato esteso si ottiene facendo tendere ϵ a zero nella formula dimostrata per A_ϵ.

Detta $C = \sqrt{A} > 0$, cioè tale che $CC = A$, si ha che se $C^{-1}BC^{-1} = D \in S_n^+(\mathbb{R}^n)$,

$$A + B = C(I+D)C.$$

Utilizzando il teorema di Binet per il determinante

$$\begin{aligned}&\det(A+B) = \det(C)^2 \det(I+D)\\ &\det(A) = \det(C)^2, \quad \det(B) = \det(C)^2 \det(D).\end{aligned}$$

Considerando D come nuova B ci si è ridotti al caso $A = I$ matrice identità e basta quindi mostrare che

$$\det(I+B)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \det(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.5}$$

B è diagonalizzabile in quanto simmetrica e definita positiva e con operazioni simili a quelle sopra si può supporre B diagonale con autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0$. Perciò la (2.5) diventa

$$\prod_{i=1}^{n}(1+\lambda_i)^{\frac{1}{n}} \geq 1 + \prod_{i=1}^{n}\lambda_i^{\frac{1}{n}}. \tag{2.6}$$

Dalla disuguaglianza tra la media geometrica e la media aritmetica

$$\begin{aligned}\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_i}\Big)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_i},\\ \Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\Big)^{\frac{1}{n}} &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i},\end{aligned}$$

e sommando membro a membro

$$\Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\lambda_i}\Big)^{\frac{1}{n}} + \Big(\prod_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{1+\lambda_i}\Big)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\lambda_i}{1+\lambda_i} = 1. \tag{2.7}$$

Dalla (2.7) si ottiene la (2.6). $\square$

Da questi risultati si deriva il teorema sulla convessità dell'energia interna.

Teorema 2.5 (Convessità dell'energia interna) *Si considera il funzionale energia interna $\mathscr{U} : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ come nella Definizione 2.1 tale che la sua densità di energia $U : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ verifichi la proprietà MCn. Siano poi $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ con $\mu_0, \mu_1 \ll \mathscr{L}^n$ e sia $T \in \mathscr{T}(\mu_0, \mu_1)$ la soluzione al problema di Monge. Allora $\mathscr{U}$ è displacement convessa.*

Dimostrazione. Dal Lemma 2.2 si ha che $\mu_t = \rho_t \mathscr{L}^n$ e ρ verifica la (2.3), quindi

$$\mathscr{U}(\mu_t) = \int_{T_t(D_0)} U\Big(\frac{\rho_0}{\det \nabla T_t} \circ T_t^{-1}\Big) dy \quad t \in [0, 1).$$

Per lo stesso cambio di variabile del Lemma 2.2 $T_t^{-1}(y) = x$, si trova

$$\mathscr{U}(\mu_t) = \int_{D_0} U\Big(\frac{\rho_0}{\det \nabla T_t}\Big) \det \nabla T_t dx \quad t \in [0, 1). \tag{2.8}$$

Per il Lemma 2.3 $\Sigma = \{x \in D_0 \mid \det \nabla T(x) = 0\}$ ha misura nulla ed è quindi possibile sostituire in (2.8) D_0 con $D_0 \setminus \Sigma$. Se invece $t = 1$ la (2.8) si deduce dalla formula di Ampére-Monge (2.4) enunciata all'interno del Lemma 2.3.

Si consideri la funzione $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definita come

$$f(t) = U\Big(\frac{\rho_0}{\det \nabla T_t}\Big) \det \nabla T_t = \rho_0 s^n U(s^{-n}), \tag{2.9}$$

con $s = s(t) = \Big(\frac{\det \nabla T_t}{\rho_0}\Big)^{\frac{1}{n}}$.

La funzione $t \mapsto s(t)$ è concava per il Lemma 2.5, mentre $s \mapsto s^n U(s^{-n})$ è decrescente e convessa per ipotesi. Sia $g(s) := s^n U(s^{-n})$, allora se $\alpha, \beta \in [0, 1]$

$$g(s((1-t)\alpha + t\beta)) \le g((1-t)s(\alpha) + ts(\beta)) \le (1-t)g(s(\alpha)) + tg(s(\beta)). \tag{2.10}$$

Nella (2.10) la prima minorazione è data dal fatto che $s((1-t)\alpha+t\beta) \ge (1-t)s(\alpha)+ts(\beta)$ e che g è decrescente, mentre la seconda minorazione è giustificata dal fatto che g è convessa. La tesi segue dal fatto che la (2.8) è convessa perchè è convessa la sua integranda e dal fatto che l'operatore integrale è lineare e quindi convesso. □

2.4 Dimostrazione alternativa della disuguaglianza di Brunn-Minkowski

In ultima istanza si dimostra una disuguaglianza valida per un parametro $t \in [0, 1]$, la quale per $t = \frac{1}{2}$ si specifica nella disuguaglianza di Brunn-Minkowski (da [1, pp. 175]). Centrali per questo obiettivo sono la disuguaglianza tra medie geometrica ed aritmetica e l'utilizzo dell'entropia di Rényi, che per $1 - \frac{1}{n} \le \alpha \le 1$ soddisfa la proprietà MCn e quindi per il Teorema 2.5 è displacement convessa.

Teorema 2.6 *Siano $A, B \subset \mathbb{R}^n$ compatti. Per ogni $t \in [0,1]$ vale la disuguaglianza*

$$\mathscr{L}^n((1-t)A + tB))^{\frac{1}{n}} \geq (1-t)\mathscr{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + t\mathscr{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Si ha che $(1-t)A + tB$ è un insieme compatto e quindi boreliano. Siano

$$\mu_0 := \frac{1}{\mathscr{L}^n(A)} X_A \mathscr{L}^n, \quad \mu_1 := \frac{1}{\mathscr{L}^n(B)} X_B \mathscr{L}^n$$

dove X_A, X_B sono le funzioni indicatrici rispettivamente di A e B.
Chiaramente $\mu_0, \mu_1 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}^n)$ e $\mu_0, \mu_1 \ll \mathscr{L}^n$ con densità $\rho_0 = \frac{X_A}{\mathscr{L}^n(A)}, \rho_1 = \frac{X_B}{\mathscr{L}^n(B)}$.

Sia $T \in \mathscr{T}(\mu_0, \mu_1)$ la soluzione al problema di Monge con costo quadratico, che esiste unica per il Teorema 2.1. Sia poi

$$\mu_t := ((1-t)Id + tT)_{\#}\mu_0$$

la geodetica da μ_0 a μ_1. Si osserva che se $K \subset \mathbb{R}^n \setminus \{(1-t)A + tB\}$ allora

$$\mu_t(K) = \mu_0(\{x \in \mathbb{R}^n \mid (1-t)x + tT(x) \in K\}) = \mu_0(\emptyset) = 0,$$

cioè μ_t è concentrata su $(1-t)A+tB$. Infatti, considerato che se $x \in A$ allora $T(x) \in B$,

$$(1-t)x + tT(x) \in K \implies x \notin A.$$

Si consideri ora l'entropia di Rényi di parametro $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$

$$U(s) = -s^{1-\frac{1}{n}}, \quad s \geq 0, \tag{2.12}$$

che quindi verifica la proprietà MCn e $U(0) = 0$. Dunque l'energia interna associata a (3.2) è convessa lungo μ_t grazie al Teorema 2.5 e quindi

$$\mathscr{U}(\mu_t) \leq -(1-t)\int_A |A|^{\frac{1}{n}-1}\, dx - t\int_B |B|^{\frac{1}{n}-1}\, dx = -(1-t)\,|A|^{\frac{1}{n}} - t\,|B|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.13}$$

Siccome $\mu_t \ll \mathscr{L}^n$, sia $\mu_t = \rho_t \mathscr{L}^n$ con $\rho_t = 0$ fuori da $C := (1-t)A + tB$. Applicando la disuguaglianza di Jensen si trova

$$-\mathscr{U}(\mu_t) = |C|\int_C \rho_t^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{|C|} \leq |C|\left(\int_C \rho_t \frac{dx}{|C|}\right)^{1-\frac{1}{n}} = |C|^{\frac{1}{n}} \tag{2.14}$$

perchè $\int_C \rho_t dx = 1$. Dalla (2.13) e (2.14) si ottiene la tesi:

$$|(1-t)A + tB|^{\frac{1}{n}} \overset{(3.4)}{\geq} -\mathscr{U}(\mu_t) \overset{(3.3)}{\geq} (1-t)\,|A|^{\frac{1}{n}} + t\,|B|^{\frac{1}{n}}.$$

□

Per il particolare valore del parametro $t = \frac{1}{2}$ nella (2.11) si ottiene la disuguaglianza di Brunn-Minkowski (1.1).

Bibliografia

[1] Ambrosio, Luigi, et al. *Lectures on Optimal Transport.* Springer, 2021.

[2] Brunn, Hermann. *Über Ovale und Eiflächen*, Inaugural Dissertation. München, 1887.

[3] Evans, L. Craig; Gariepy, F. Roland. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Routledge, 1992.

[4] Federer, Herbert. *Geometric Measure Theory.* Springer, 1996.

[5] Figalli, Alessio; S. Jerison, David. *Quantitative stability for the Brunn-Minkowski inequality.* Advances in Mathematics, 2017.

[6] Folland, Gerald B. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications.* J. Wiley, 1984.

[7] Minkowski, Hermann. *Geometrie der Zahlen.* Leipzig, Teubner, 1897.

[8] Monti, Roberto. *Teoria del Trasporto ottimo ed Elementi di Analisi superiore.* Università degli Studi di Padova. Dispense del corso 2022-2023.