



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"
Corso di Laurea in Matematica

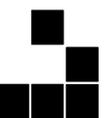
TESI DI LAUREA TRIENNALE

**Simmetrie in competizione:
la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev**

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Candidato:
Vera Silvestri
Matr. 2033883

Anno Accademico 2023-2024
20 settembre 2024



Indice

Introduzione	1
1 Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev	3
1.1 Sulla disuguaglianza di Young	6
2 Invarianza conforme della disuguaglianza di HLS	7
2.1 Azione del gruppo conforme su $L^p(\mathbb{R}^n)$	8
2.2 Proiezione stereografica	8
2.3 Teorema di invarianza conforme di HLS	9
3 Simmetrie in competizione	11
3.1 Il funzionale \mathcal{H}	11
3.2 Riarrangiamenti simmetrici decrescenti	12
3.3 Simmetrie in competizione	14
4 Dimostrazione di HLS con la costante ottimale	17
Lista dei simboli	21
Bibliografia	23

Introduzione

La disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev fu presentata nel 1928 da G. H. Hardy e J. E. Littlewood e fu provata senza la costante ottimale dagli stessi [3, 4] e da Sobolev [11]. Tale dimostrazione, presentata nel Capitolo 1, si basa essenzialmente sulla manipolazione di integrali e sulla disuguaglianza di Hölder e non richiede che alcune nozioni di analisi reale.

Il calcolo esplicito della costante ottimale rappresenta invece un problema molto più complesso. Inoltre non è necessariamente vero che esistano funzioni, dette *funzioni ottimali*, per cui vale l'uguaglianza. Potrebbe infatti accadere che la costante sia un estremo superiore per cui qualsiasi successione massimizzante di funzioni converga alla funzione identicamente nulla, e dunque l'estremo non sia mai assunto. D'altra parte, come mostrato nel Capitolo 2, la disuguaglianza è invariante per isometrie e dilatazioni, e nel caso in cui le due funzioni coinvolte appartengano allo stesso spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$, ovvero se nell'enunciato vale $p = r$, si ha invarianza anche per inversione rispetto alla sfera unitaria. Dunque una funzione ottimale, se esiste, certamente non è unica.

Tali questioni furono parzialmente risolte solo nel 1983 da E. H. Lieb [5], il quale dimostrò l'esistenza di funzioni ottimali, e nel caso $p = r$ le calcolò esplicitamente insieme alla costante ottimale. Questa dimostrazione impiega in modo cruciale il concetto di *riarrangiamento simmetrico decrescente* di una funzione, e la relativa disuguaglianza dovuta a F. Riesz [8].

La dimostrazione della disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev con la costante ottimale nel caso $p = r$ qui riportata nei Capitoli 3 e 4, tuttavia, è successiva ed è dovuta a E. Carlen e M. Loss [2]. Anziché mostrare separatamente l'esistenza e la forma esplicita delle funzioni ottimali, essi risolvono simultaneamente entrambe le questioni sfruttando le simmetrie del problema. Applicando ripetutamente ad una funzione generica una trasformazione conforme e il riarrangiamento simmetrico essi costruiscono una successione massimizzante che converge fortemente ad una funzione non nulla. Questa funzione limite, indipendente da quella di partenza, è allora una funzione ottimale. Se si applica poi a questa una generica trasformazione conforme si ottengono tutte le possibili funzioni ottimali. Questo metodo viene detto delle *simmetrie in competizione*, poiché le trasformazioni applicate, pur contrastandosi a vicenda nel senso che sarà chiaro in seguito, contribuiscono insieme a produrre la funzione limite.

Il calcolo della costante ottimale per il caso $p = r$ è presentato nel Capitolo 4 e segue invece quello originale di Lieb, che sfrutta le trasformate di Fourier delle funzioni coinvolte. Il caso $p \neq r$, non discusso qui, rappresenta ad oggi un problema aperto: sebbene sia stata provata l'esistenza di funzioni ottimali, la loro forma esplicita, così come la costante ottimale, non è nota.

Per enunciati e dimostrazioni dei teoremi di analisi reale e complessa menzionati nel testo si fa riferimento ai manuali *Analysis* di Lieb-Loss [6] e *Real and Complex Analysis* di W. Rudin [10]. Per una discussione approfondita sui riarrangiamenti simmetrici decrescenti, comprensiva delle disuguaglianze qui impiegate, si vedano in particolare il Capitolo 3 di *Analysis* e l'articolo originale di Riesz [8]. Per ulteriori riferimenti puntuali a risultati che verranno applicati senza dimostrazione si rimanda alle note bibliografiche presenti nel testo.

Capitolo 1

Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev

In questo capitolo si enuncia la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev e se ne dimostra la versione senza costante ottimale nel caso generale di due funzioni appartenenti rispettivamente agli spazi $L^p(\mathbb{R}^n)$ e $L^r(\mathbb{R}^n)$ (con p ed r non necessariamente uguali). Viene dato anche un primo limite superiore per la costante ottimale, dipendente solo dai parametri p, r e λ e dalla dimensione n dello spazio. Tale dimostrazione segue da vicino quella proposta da Lieb e Loss in *Analysis* [6].

In chiusura di capitolo si confronta questa disuguaglianza integrale con un'altra, solo apparentemente più generale, detta disuguaglianza di Young, e si chiarisce perché HLS *non* sia un corollario immediato di quest'ultima.

Nel seguito si considereranno, ove non diversamente specificato, funzioni definite su \mathbb{R}^n e a valori in \mathbb{C} . Tuttavia sarà immediatamente chiaro come per questa prima dimostrazione sia sufficiente considerare il caso di funzioni a valori reali e positivi.

Teorema 1.1 (Disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev). *Siano $p, r > 1$ e $0 < \lambda < n$ tali che $1/p + \lambda/n + 1/r = 2$. Siano $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$. Allora esiste una costante ottimale $C(n, \lambda, p) > 0$ che non dipende da f e h tale che*

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \|x - y\|^{-\lambda} h(y) dx dy \right| \leq C(n, \lambda, p) \|f\|_p \|h\|_r. \quad (1.1)$$

La costante ottimale soddisfa

$$C(n, \lambda, p) \leq \frac{n}{n - \lambda} \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right)^{\lambda/n} \frac{1}{pr} \left(\left(\frac{\lambda/n}{1 - 1/p} \right)^{\lambda/n} + \left(\frac{\lambda/n}{1 - 1/r} \right)^{\lambda/n} \right).$$

Se $p = r = 2n/(2n - \lambda)$, allora

$$C(n, \lambda, p) = C(n, \lambda) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left(\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right)^{-1 + \lambda/n} \quad (1.2)$$

e c'è uguaglianza in (1.1) se e solo se $h \equiv cf, c \in \mathbb{R}$ e

$$f(x) = A(\gamma^2 + \|x - a\|^2)^{-(2n - \lambda)/2} \quad (1.3)$$

per qualche $A \in \mathbb{C}, 0 \neq \gamma \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Poiché

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \|x - y\|^{-\lambda} h(y) \, dx \, dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| \|x - y\|^{-\lambda} |h(y)| \, dx \, dy$$

e $\|f\|_p = \| |f| \|_p$, $\|h\|_r = \| |h| \|_r$ si può assumere senza perdita di generalità che f e h siano funzioni a valori reali con $f, h \geq 0$. Inoltre a meno di dividere entrambi i membri della disuguaglianza per le norme di f e h si può supporre $\|f\|_p = \|h\|_r = 1$.

Si noti che valgono le seguenti:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\infty \chi_{\{f>a\}}(x) \, da, \\ h(x) &= \int_0^\infty \chi_{\{h>b\}}(x) \, db, \\ \|x\|^{-\lambda} &= \lambda \int_0^\infty c^{-\lambda-1} \chi_{\{\|\cdot\|<c\}}(x) \, dc. \end{aligned}$$

Dunque detta I l'espressione a sinistra in (1.1), applicando il teorema di Tonelli [6, 1.12] essa si può riscrivere come

$$I = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} c^{-\lambda-1} \chi_{\{f>a\}}(x) \chi_{\{h>b\}}(y) \chi_{\{\|\cdot\|<c\}}(x-y) \, dx \, dy \, da \, db \, dc. \quad (1.4)$$

I si può stimare sostituendo la maggiore delle tre funzioni caratteristiche in (1.4) con la costante 1: siano

$$\begin{aligned} v(a) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>a\}}(x) \, dx, & w(b) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{h>b\}}(x) \, dx, \\ u(c) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{\|\cdot\|<c\}}(x) \, dx = m(B^n(0, c)) = \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} c^n, & I(a, b, c) &:= \frac{v(a)w(b)u(c)}{\max\{v(a), w(b), u(c)\}} \end{aligned}$$

allora

$$I \leq \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty c^{-\lambda-1} I(a, b, c) \, da \, db \, dc. \quad (1.5)$$

Per integrare l'espressione a destra in (1.5) in dc considero dapprima il caso $v(a) \geq w(b)$:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty c^{-\lambda-1} I(a, b, c) \, dc &\leq \int_{\{u(c) \leq v(a)\}} c^{-\lambda-1} w(b) u(c) \, dc + \int_{\{u(c) > v(a)\}} c^{-\lambda-1} w(b) v(a) \, dc = \\ &= w(b) \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \int_0^{[v(a)n/|\mathbb{S}^{n-1}|]^{1/n}} c^{-\lambda-1+n} \, dc + w(b) v(a) \int_{[v(a)n/|\mathbb{S}^{n-1}|]^{1/n}}^{+\infty} c^{-\lambda-1} \, dc = \\ &= \frac{1}{n-\lambda} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} w(b) v(a)^{1-\lambda/n} + \frac{1}{\lambda} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} w(b) v(a)^{1-\lambda/n} = \\ &= \frac{n}{\lambda(n-\lambda)} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} w(b) v(a)^{1-\lambda/n}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Analogamente per $v(a) < w(b)$ si ottiene

$$\int_0^\infty c^{-\lambda-1} I(a, b, c) \, dc \leq \frac{n}{\lambda(n-\lambda)} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} w(b)^{1-\lambda/n} v(a). \quad (1.7)$$

Inserendo (1.6) e (1.7) in (1.5), e poiché $w(b) \leq v(a) \Leftrightarrow w(b)v(a)^{1-\lambda/n} \leq w(b)^{1-\lambda/n}v(a)$, si ha

$$I \leq \frac{n}{n-\lambda} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} \int_0^\infty \int_0^\infty \min\{w(b)v(a)^{1-\lambda/n}, w(b)^{1-\lambda/n}v(a)\} da db. \quad (1.8)$$

Si osservi che vale

$$\begin{aligned} 1 &= \|f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx = p \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty a^{p-1} \chi_{\{f>a\}}(x) da dx = \\ &= p \int_0^\infty a^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{f>a\}}(x) dx da = p \int_0^\infty a^{p-1} v(a) da, \end{aligned} \quad (1.9)$$

e analogamente

$$1 = \|h\|_r^r = r \int_0^\infty b^{r-1} w(b) db. \quad (1.10)$$

Quindi $p \int_0^\infty a^{p-1} v(a) da = r \int_0^\infty b^{r-1} w(b) db$, da cui $w(b) \leq v(a) \Leftrightarrow a^{p/r} \leq b$. Perciò per calcolare l'integrale in db in (1.8) si separino i casi $b \leq a^{p/r}$ e $b > a^{p/r}$ (cioè $a < b^{r/p}$):

$$\int_0^\infty v(a) \int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n} db da + \int_0^\infty w(b) \int_0^{b^{r/p}} v(a)^{1-\lambda/n} da db. \quad (1.11)$$

Per la disuguaglianza di Hölder [6, 2.3] con $w(b)^{1-\lambda/n} b^m \in L^{1/(1-\lambda/n)}(\mathbb{R}^n)$ e $b^{-m} \in L^{n/\lambda}(\mathbb{R}^n)$ dove $m := (r-1)(1-\lambda/n)$ si ha

$$\int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n} db = \int_0^{a^{p/r}} w(b)^{1-\lambda/n} b^m b^{-m} db \leq \left[\int_0^{a^{p/r}} w(b) b^{r-1} db \right]^{1-\lambda/n} \left[\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda} db \right]^{\lambda/n}$$

e poiché $\frac{mn}{\lambda} = 1 - \frac{1}{\lambda}(n - r(n - \lambda)) < 1$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v(a) \left[\int_0^{a^{p/r}} b^{-mn/\lambda} db \right]^{\lambda/n} da &= \int_0^\infty v(a) \left[\frac{1}{1 - mn/\lambda} \right]^{\lambda/n} a^{\frac{p}{r}(1 - \frac{mn}{\lambda}) \frac{\lambda}{n}} da = \\ &= \left[\frac{\lambda}{n - r(n - \lambda)} \right]^{\lambda/n} \int_0^\infty v(a) a^{p-1} da. \end{aligned}$$

Quindi il primo addendo in (1.11) è stimato da

$$\left[\frac{\lambda}{n - r(n - \lambda)} \right]^{\lambda/n} \left[\int_0^\infty v(a) a^{p-1} da \right] \left[\int_0^\infty w(b) b^{r-1} db \right]^{1-\lambda/n}$$

che applicando (1.9) e (1.10) è uguale a

$$\left[\frac{\lambda}{n - r(n - \lambda)} \right]^{\lambda/n} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{r} \right)^{1-\lambda/n} = \frac{1}{pr} \left[\frac{\lambda/n}{1 - 1/p} \right]^{\lambda/n}. \quad (1.12)$$

In modo analogo, scambiando $v(a)$ con $w(b)$ e p con r il secondo addendo in (1.11) è stimato da

$$\frac{1}{pr} \left[\frac{\lambda/n}{1 - 1/r} \right]^{\lambda/n}. \quad (1.13)$$

Inserendo in (1.12) e (1.13) in (1.8) si ottiene

$$I \leq \frac{n}{n-\lambda} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} \frac{1}{pr} \left[\left(\frac{\lambda/n}{1 - 1/p} \right)^{\lambda/n} + \left(\frac{\lambda/n}{1 - 1/r} \right)^{\lambda/n} \right]. \quad \square$$

1.1 Sulla disuguaglianza di Young

Si osservi che la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev non è un caso particolare, per $q = n/\lambda$, della disuguaglianza di Young sulla convoluzione [6, 4.2], la quale afferma che *dati* $p, q, r \geq 1$ tali che $1/p + 1/q + 1/r = 2$, e date $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, $h \in L^r(\mathbb{R}^n)$, esiste $C_{p,q,r;n} > 0$ tale che

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(g * h)(x) dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x-y)h(y) dx dy \right| \leq C_{p,q,r;n} \|f\|_p \|g\|_q \|h\|_r.$$

Questo perché la funzione $g(x) = \|x\|^{-\lambda}$ non appartiene ad alcuno spazio $L^q(\mathbb{R}^n)$ per $q \geq 1$. Essa è tuttavia nello spazio debole $L_w^q(\mathbb{R}^n)$ per $q = n/\lambda$, definito come l'insieme delle funzioni Lebesgue-misurabili $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tali che

$$\sup_{\alpha > 0} \alpha \cdot m(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > \alpha\})^{1/q} < \infty. \quad (1.14)$$

Infatti

$$\begin{aligned} \sup_{\alpha > 0} \alpha \cdot m(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^{-\lambda} > \alpha\})^{\lambda/n} &= \sup_{\alpha > 0} \alpha \cdot m(B^n(0, \alpha^{-1/\lambda}))^{\lambda/n} = \\ &= \sup_{\alpha > 0} \alpha \cdot \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \alpha^{-n/\lambda} \right]^{\lambda/n} = \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n} < \infty. \end{aligned}$$

Si noti che l'espressione in (1.14) non definisce una norma poiché non soddisfa la disuguaglianza triangolare. Per $q > 1$ (come in questo caso, essendo $\lambda < n$) è però definita su $L_w^q(\mathbb{R}^n)$ la norma, equivalente a (1.14),

$$\|f\|_{q,w} := \sup_{\substack{A \in \mathcal{L}^n \\ m(A) < \infty}} m(A)^{-1+1/q} \int_A |f(x)| dx \quad \text{per ogni } f \in L_w^q(\mathbb{R}^n).$$

Si vedano a questo proposito [6, 4.2], la seconda nota a [6, 4.3] e le osservazioni di Lieb nell'introduzione a [5, p. 351-352]. In particolare per $g(x) = \|x\|^{-\lambda}$ e $q = n/\lambda$ si ha

$$\|g\|_{n/\lambda,w} = \frac{n}{n-\lambda} \left[\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} \right]^{\lambda/n}.$$

Per questo motivo la disuguaglianza di Hardy-Littlewood-Sobolev è anche detta disuguaglianza di Young debole.

Capitolo 2

Invarianza conforme della disuguaglianza di HLS

Dimostrata la versione più debole della disuguaglianza di HLS nel caso generale, si passerà ora a considerare esclusivamente il caso $p = r$. Verranno introdotti gli strumenti ed i risultati necessari a provare l'esistenza di funzioni ottimali e la forma che esse assumono, e quindi a calcolare esplicitamente la costante ottimale.

In particolare in questo capitolo, seguendo quanto osservato negli articoli di Lieb [5] e di Carlen-Loss [2] e poi ripreso in [6, 4.4], si definisce un'azione del gruppo delle trasformazioni conformi sullo spazio $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $p \geq 1$. Si studia inoltre il sollevamento tramite proiezione stereografica di una funzione in $L^p(\mathbb{R}^n)$ a una funzione definita sulla sfera unitaria $\mathbb{S}^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ che sia ancora a p -esima potenza integrabile.

Sfruttando questo sollevamento e il ruolo dell'inversione di \mathbb{R}^n rispetto a \mathbb{S}^{n-1} si dimostra infine l'invarianza di HLS all'azione del gruppo conforme [6, 4.5]. Questa simmetria della disuguaglianza sarà poi cruciale per costruire una successione massimizzante di funzioni, ovvero convergente ad una funzione ottimale.

Definizione 2.1. Siano $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ aperti, una mappa $f: U \rightarrow V$ si dice *conforme* se per ogni $u_0 \in U$ f preserva l'angolo formato da due curve passanti per u_0 .

Le isometrie di \mathbb{R}^n , generate dalle traslazioni e dal gruppo ortogonale di rotazioni e riflessioni,

$$x \mapsto Rx + a, \quad R \in O(n), \quad a \in \mathbb{R}^n$$

sono conformi. Altri esempi di mappe conformi di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n in sè sono il riscalamento di ragione non nulla e l'inversione rispetto alla sfera unitaria,

$$\mathcal{I}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \mathcal{I}(x) := \frac{x}{\|x\|^2}$$

la quale tuttavia inverte l'orientazione delle curve.

L'insieme delle mappe conformi di \mathbb{R}^n in sè forma un gruppo rispetto alla composizione, detto gruppo conforme e qui denotato con \mathcal{C} . Il Teorema di Liouville [7] afferma che isometrie, riscalamenti e inversione generano tutto il gruppo conforme. Il fatto che \mathcal{I} non sia definita nell'origine si risolve facilmente aggiungendo ad \mathbb{R}^n un punto all'infinito come mostrato nella Sezione 2.2 ed estendendo di conseguenza le altre mappe conformi.

2.1 Azione del gruppo conforme su $L^p(\mathbb{R}^n)$

Si definisce l'azione del gruppo conforme su $L^p(\mathbb{R}^n)$ nel seguente modo. Siano $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ in \mathcal{C} , $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e sia $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ tale che f_k abbia supporto compatto per ogni $k \in \mathbb{N}$ e $f_k \rightarrow f$ in norma p . È ben definita ed è in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ la funzione

$$(\gamma^* f_k)(x) := |\det J\gamma^{-1}(x)|^{1/p} f_k(\gamma^{-1}x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad (2.1)$$

e vale $\|\gamma^* f_k\|_p = \|f_k\|_p$ per il teorema di cambio variabile [10, 7.26]. Allora $\{\gamma^* f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge in $L^p(\mathbb{R}^n)$ a una funzione che dipende solo da f e non dalla successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, e che quindi si può denotare con $\gamma^* f$. Poiché la γ^* così definita è lineare e

$$\|\gamma^* f\|_p = \|f\|_p, \quad (2.2)$$

$\gamma^*: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ è una isometria. Si osservi che è necessario passare per la successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ per costruire γ^* poiché una funzione a supporto illimitato potrebbe avere problemi di convergenza in norma p se trasformata direttamente (in particolare se traslata o dilatata).

2.2 Proiezione stereografica

Sia $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ la compattificazione a un punto, o di Alexandroff [1], di \mathbb{R}^n , dove $\infty \notin \mathbb{R}^n$ e gli intorni di ∞ sono gli aperti illimitati di \mathbb{R}^n . Si definisce la proiezione stereografica come $\mathcal{S}: \overline{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{S}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n) \mapsto s = (s_1, \dots, s_{n+1})$,

$$s_i = \frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} \text{ per } i \in \{1, \dots, n\}, \quad s_{n+1} = \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \text{ se } x \in \mathbb{R}^n; \quad s = (0, \dots, 0, -1) \text{ se } x = \infty.$$

\mathcal{S} ammette inversa $\mathcal{S}^{-1}: \mathbb{S}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}^n}$, $s = (s_1, \dots, s_{n+1}) \mapsto x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$x_i = \frac{s_i}{1 + s_{n+1}} \text{ per } i \in \{1, \dots, n\} \text{ se } s_{n+1} \neq -1; \quad x = \infty \text{ se } s_{n+1} = -1.$$

Le $(x_1, \dots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n}$ così definite si dicono *coordinate stereografiche* di \mathbb{S}^n .

Si verifica facilmente che \mathcal{S} è una mappa conforme, dunque si può costruire una isometria di $L^p(\mathbb{R}^n)$ in $L^p(\mathbb{S}^n)$ a partire da \mathcal{S} come nel caso precedente di mappe conformi di \mathbb{R}^n in sè. Data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si definisce il sollevamento di f a \mathbb{S}^n , $F \in L^p(\mathbb{S}^n)$, come

$$F: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto F(s) = (\mathcal{S}^* f)(s) := |\det J\mathcal{S}^{-1}(s)|^{1/p} f(\mathcal{S}^{-1}(s)). \quad (2.3)$$

Per determinare esplicitamente $|\det J\mathcal{S}^{-1}(s)|$ bisogna ora calcolare la metrica su \mathbb{S}^n ereditata da \mathbb{R}^{n+1} . Siano $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $s = \mathcal{S}(x), t = \mathcal{S}(y) \in \mathbb{S}^n$,

$$\begin{aligned} \|s - t\|^2 &= \sum_{i=1}^{n+1} (s_i - t_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2x_i}{1 + \|x\|^2} - \frac{2y_i}{1 + \|y\|^2} \right)^2 + \left(\frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} - \frac{1 - \|y\|^2}{1 + \|y\|^2} \right)^2 = \\ &= \frac{4\|x\|^2}{(1 + \|x\|^2)^2} + \frac{4\|y\|^2}{(1 + \|y\|^2)^2} - \frac{8x \cdot y}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)} + \\ &\quad + \frac{1 + \|x\|^4 - 2\|x\|^2}{(1 + \|x\|^2)^2} + \frac{1 + \|y\|^4 - 2\|y\|^2}{(1 + \|y\|^2)^2} - \frac{2(1 - \|x\|^2)(1 - \|y\|^2)}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)} = \\ &= 2 - 2 \frac{4x \cdot y + (1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2) - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)} = \\ &= 4 \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2x \cdot y}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)} = \frac{4}{(1 + \|x\|^2)(1 + \|y\|^2)} \|x - y\|^2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Allora l'elemento di volume infinitesimo su \mathbb{S}^n in funzione delle coordinate stereografiche è

$$ds = \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^n dx \quad (2.5)$$

dunque $|\det JS(x)| = \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^n$ e $|\det JS^{-1}(s)| = \left(\frac{2}{1 + \|x(s)\|^2} \right)^{-n} = (1 + s_{n+1})^{-n}$.

Inserendo questa espressione in (2.3) il sollevamento di una funzione $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ alla sfera \mathbb{S}^n è

$$F(s) = (1 + s_{n+1})^{-n/p} f(\mathcal{S}^{-1}(s)) = \left(\frac{2}{1 + \|x(s)\|^2} \right)^{-n/p} f(x(s)), \quad s \in \mathbb{S}^n \quad (2.6)$$

con

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{S}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.7)$$

2.3 Teorema di invarianza conforme di HLS

Poiché \mathcal{S} è mappa conforme c'è una biezione tra il gruppo conforme su \mathbb{R}^n e quello su \mathbb{S}^n data da $\gamma \mapsto \mathcal{S} \circ \gamma \circ \mathcal{S}^{-1}$ per $\gamma \in \mathcal{C}$. In particolare l'inversione \mathcal{I} induce su \mathbb{S}^n la riflessione $(s_1, \dots, s_{n+1}) \mapsto (s_1, \dots, -s_{n+1})$. Di conseguenza identificando $\overline{\mathbb{R}^n}$ con \mathbb{S}^n via proiezione stereografica il Teorema di Liouville si traduce nel fatto che le isometrie di \mathbb{S}^n (ovvero il gruppo ortogonale, tra cui la riflessione indotta da \mathcal{I}), le traslazioni e i riscalamenti generano \mathcal{C} .

Usando questo fatto si può ora dimostrare il seguente

Teorema 2.1 (Invarianza conforme di HLS). *Siano $p = r$ in (1.1), $F \in L^p(\mathbb{S}^n)$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ legate da (2.6) e lo stesso per H e h . Allora, indicando con $\|s - t\|$ la distanza euclidea su \mathbb{R}^{n+1} e non quella geodetica su \mathbb{S}^n ,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \|x - y\|^{-\lambda} h(y) dx dy = \int_{\mathbb{S}^n} \int_{\mathbb{S}^n} F(s) \|s - t\|^{-\lambda} H(t) ds dt \quad (2.8)$$

e

$$\|F\|_{L^p(\mathbb{S}^n)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (2.9)$$

Quindi la disuguaglianza di HLS è invariante rispetto alle isometrie di \mathbb{S}^n . Inoltre essa ha invarianza conforme, ovvero data $\gamma \in \mathcal{C}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} (\gamma^* f)(x) \|x - y\|^{-\lambda} (\gamma^* h)(y) dx dy = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \|x - y\|^{-\lambda} h(y) dx dy$$

e

$$\|\gamma^* f\|_p = \|f\|_p, \quad \|\gamma^* h\|_p = \|h\|_p. \quad (2.10)$$

Dimostrazione. Poiché $-\frac{n}{p} - \frac{\lambda}{2} + n = 0$, si può riscrivere l'espressione a sinistra in (2.8) come

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{-n/p} f(x) \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \|x - y\|^2 \frac{2}{1 + \|y\|^2} \right)^{-\lambda/2} \cdot \left(\frac{2}{1 + \|y\|^2} \right)^{-n/p} h(y) \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^n dx \left(\frac{2}{1 + \|y\|^2} \right)^n dy,$$

che usando (2.6), (2.4) e (2.5) è uguale al termine a destra in (2.8). Le uguaglianze (2.9) e (2.10) sono rispettivamente ripetizioni di (2.7) e (2.2). L'invarianza di (1.1) a isometrie di \mathbb{S}^n , traslazioni e riscaldamento è ovvia tramite cambio variabile, dunque per quanto detto sopra questo è sufficiente per concludere che (1.1) sia invariante rispetto a \mathcal{C} . \square

Capitolo 3

Simmetrie in competizione

Seguendo l'approccio utilizzato nell'articolo di Carlen e Loss [2], questo capitolo è interamente volto a dimostrare il risultato fondamentale, detto delle simmetrie in competizione [6, 4.6], da cui la dimostrazione della disuguaglianza di HLS con la costante ottimale nel caso $p = r$ seguirà poi come corollario quasi immediato.

Si mostra dapprima che è sufficiente considerare il caso in cui $f = h$ in (1.1), così che la costante ottimale sia caratterizzata come l'estremo superiore di un funzionale di tipo integrale su $L^p(\mathbb{R}^n)$, denotato con \mathcal{H} . Per provare che tale estremo superiore è un massimo, ovvero che esiste una funzione ottimale, si vuole costruire una successione di funzioni su cui \mathcal{H} assuma valori sempre maggiori (ma certamente non divergenti, poiché è già stato trovato un limite superiore per la costante ottimale).

A questo scopo si introduce la nozione di riarrangiamento simmetrico decrescente di una funzione, che intuitivamente trasforma una funzione definita su \mathbb{R}^n in un'altra radiale e decrescente al crescere della distanza dall'origine, mantenendo tuttavia costante il volume degli insiemi di livello. Grazie ad un risultato dovuto a F. Riesz [8] si trova che se si applica tale riarrangiamento ad una funzione il valore del funzionale aumenta. Invece per quanto dimostrato nel capitolo precedente \mathcal{H} rimane costante se si trasforma una funzione per mezzo di una mappa conforme. La successione cercata è allora costituita dalle funzioni ottenute iterando questa coppia di trasformazioni: ad ogni passo f_k è il riarrangiamento di una trasformazione conforme di f_{k-1} , e dunque il valore di \mathcal{H} in f_k è maggiore o uguale a $\mathcal{H}(f_{k-1})$.

Il teorema delle simmetrie in competizione afferma che tale successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge fortemente in $L^p(\mathbb{R}^n)$ ad una funzione non nulla, che nel capitolo successivo si proverà essere una funzione ottimale, in cui cioè \mathcal{H} ha un massimo.

3.1 Il funzionale \mathcal{H}

Mostriamo innanzitutto che fissata $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la scelta migliore per h in (1.1) è $h = f$. Questo discende immediatamente per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz [10, 4.2] dal seguente lemma, la cui dimostrazione è adattata da [6, 9.8] (positività dell'energia di Coulomb).

Lemma 3.1. *La mappa $I: L^p(\mathbb{R}^n) \times L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ definita da*

$$I(f, h) := \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \|x - y\|^{-\lambda} h(y) \, dx \, dy, \quad f, h \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

è un prodotto scalare su $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Che I sia una forma bilineare simmetrica è ovvio dalla definizione. È sufficiente quindi verificare che tale forma è definita positiva. Siano

$$g_\lambda(x) := \|x\|^{-\lambda}, \quad k(x) := [g_{(n+\lambda)/2} * g_{(n+\lambda)/2}](x), \quad K(t) := k(x) \text{ per } \|x\| = t$$

con K ben definita perché k radiale, e sia $c := \int_0^\infty t^{\lambda-1} K(t) dt$. Allora

$$\begin{aligned} c\|x-y\|^{-\lambda} &= \|x-y\|^{-\lambda} \int_0^\infty t^{\lambda-1} K(t) dt = \int_0^\infty t^{\lambda-1} k(t(x-y)) dt = \\ &= \int_0^\infty t^{\lambda-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_{(n+\lambda)/2}(\xi) g_{(n+\lambda)/2}(\xi - t(x-y)) d\xi dt = \\ &= \int_0^\infty t^{n+\lambda-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-y)) g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-x)) d\xi dt. \end{aligned}$$

Data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \neq 0$ si trova quindi

$$\begin{aligned} I(f, f) &= \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)f(y) \int_0^\infty t^{n+\lambda-1} \int_{\mathbb{R}^n} g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-y)) g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-x)) d\xi dt dx dy = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty t^{n+\lambda-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x) g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-x)) dx \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g_{(n+\lambda)/2}(t(\xi-y)) dy \right] d\xi dt = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty t^{n+\lambda-1} \int_{\mathbb{R}^n} [f * \tilde{g}_{(n+\lambda)/2}]^2(\xi) d\xi dt > 0 \end{aligned}$$

dove $\tilde{g}_{(n+\lambda)/2}(x) := g_{(n+\lambda)/2}(tx)$. □

Da quanto sopra si deduce che, definito per $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ il funzionale

$$\mathcal{H}(f) := \frac{1}{\|f\|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\|x-y\|^{-\lambda} f(y) dx dy, \quad (3.1)$$

la costante in (1.2) che ci proponiamo di calcolare è data da

$$C(n, \lambda) = \sup\{\mathcal{H}(f) \mid f \in L^p(\mathbb{R}^n) \text{ a valori reali, } f \geq 0, f \neq 0\}. \quad (3.2)$$

Inoltre bisogna mostrare che tale estremo superiore è un massimo, ovvero che esistono funzioni ottimali \tilde{f} tali che $\mathcal{H}(\tilde{f}) = C(n, \lambda)$, e che esse sono date da (1.3).

3.2 Riarrangiamenti simmetrici decrescenti

Definizione 3.1. Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ insieme boreliano con misura di Lebesgue finita, si definisce il *riarrangiamento simmetrico* A^* di A come la palla aperta centrata nell'origine avente la stessa misura di A ,

$$A^* := B^n(0, r) \quad \text{con } r \in [0, +\infty) \text{ t.c. } \frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n} r^n = m(A).$$

Si osservi che utilizzando palle aperte la funzione χ_{A^*} risulta semicontinua inferiormente.

Definizione 3.2. Data $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funzione Borel-misurabile infinitesima all'infinito, si definisce il *riarrangiamento simmetrico decrescente* $\mathcal{R}f$ di f come

$$\mathcal{R}f(x) := \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x) dt. \quad (3.3)$$

Si notino alcune proprietà immediate dei riarrangiamenti utili per quanto segue. Data f come sopra, $\mathcal{R}f$ è positiva, radiale e debolmente decrescente, nel senso che se $\|x\| \leq \|y\|$ allora $\mathcal{R}f(x) \geq \mathcal{R}f(y)$. È inoltre Borel-misurabile poiché i sopralivelli di $\mathcal{R}f$ sono i riarrangiamenti simmetrici dei sopralivelli di $|f|$, dunque sono palle (aperte). Se poi $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ per $1 \leq p \leq \infty$ vale $\|\mathcal{R}f\|_p = \|f\|_p$. Allora dalla disuguaglianza di Riesz sui riarrangiamenti, [8] e [6, 3.7], segue che per $\mathcal{H}(f)$ definito come in (3.1)

$$\mathcal{H}(f) \leq \mathcal{H}(\mathcal{R}f). \quad (3.4)$$

Inoltre poiché $g_\lambda(x) = \|x\|^{-\lambda}$ è strettamente decrescente si ha uguaglianza in (3.4) se e solo se f è la traslata di una funzione radiale decrescente [6, 3.9]. Di conseguenza una funzione ottimale per la disuguaglianza di HLS, se esiste, deve necessariamente essere di questo tipo. D'altra parte dal Teorema 2.1 segue immediatamente che il funzionale \mathcal{H} è invariante al gruppo conforme, ovvero data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $\gamma \in \mathcal{C}$ e γ^*f definita come in (2.1)

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(\gamma^*f). \quad (3.5)$$

Mostreremo ora come l'azione di \mathcal{C} su una funzione e il riarrangiamento simmetrico della stessa non siano operazioni *compatibili*, nel senso che la trasformazione conforme di una funzione radiale non è in generale radiale (dunque le due operazioni non commutano in generale).

Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ radiale, allora $F \in L^p(\mathbb{S}^n)$ definita come in (2.6) è invariante rispetto alle isometrie di \mathbb{S}^n che fissano il polo Nord $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1)$, corrispondenti agli elementi del gruppo ortogonale su \mathbb{R}^n . Sia invece \mathcal{D} una diversa isometria, ad esempio

$$\mathcal{D}: \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n, s = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n+1}) \mapsto \mathcal{D}s = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_{n+1}, -s_n)$$

la rotazione di $\pi/2$ che mappa \mathbf{n} in $\mathbf{e} = (0, \dots, 0, 1, 0)$. $F(\mathcal{D}^{-1}s)$ è dunque radialmente simmetrica rispetto all'asse \mathbf{e} . Si supponga che, trasportando $F(\mathcal{D}^{-1}s)$ ad una funzione su \mathbb{R}^n tramite l'inversa di (2.6) si ottenga ancora una funzione radiale. Allora deve essere come prima $F(\mathcal{D}^{-1}s)$ simmetrica rispetto all'asse \mathbf{n} . In altre parole esistono due funzioni $\phi, \psi: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che da una parte

$$F(s) = \phi(s_{n+1}), \quad (3.6)$$

ovvero F dipende solo dalla coordinata s_{n+1} , dall'altra

$$F(\mathcal{D}^{-1}s) = \psi(s_{n+1}). \quad (3.7)$$

Confrontando (3.6) e (3.7) si trova

$$\phi(s_{n+1}) = F(s) = \psi((\mathcal{D}s)_{n+1}) = \psi(-s_n) \quad \text{per ogni } s = (s_1, \dots, s_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$$

e questo è possibile solo per F costante su \mathbb{S}^n , $F \equiv k$ per qualche $k \in \mathbb{C}$. Applicando l'inversa di (2.6) deve quindi essere

$$f(x) = k \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{n/p}.$$

Poiché questo argomento non dipende in modo essenziale dalla forma di \mathcal{D} , si può enunciare in generale il seguente

Lemma 3.2. *Data $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ radiale e $\gamma \in \mathcal{C}$, γ^*f è radiale $\Leftrightarrow f(x) = c \left(\frac{1}{1 + \|x\|^2} \right)^{n/p}$, $c \in \mathbb{C}$.*

3.3 Simmetrie in competizione

Definiamo ora la trasformazione di $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tramite \mathcal{D} come

$$(\mathcal{D}f)(x) := [(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{D} \circ \mathcal{S})^* f](x) = (\mathcal{S}^{-1})^* F(\mathcal{D}^{-1}s) \quad (3.8)$$

con $s = \mathcal{S}(x)$ e F come in (2.6). In altre parole f viene sollevata a \mathbb{S}^n , si compie una rotazione di $\pi/2$ sulla sfera e infine si riporta la funzione a \mathbb{R}^n . Per quanto detto sopra passando al riarrangiamento simmetrico decrescente di f , $\mathcal{R}f$, si ha una funzione radiale, ma in generale $\mathcal{D}\mathcal{R}f$ non sarà radiale. È quindi possibile applicare nuovamente il riarrangiamento per rendere $\mathcal{D}\mathcal{R}f$ radiale, e iterare il procedimento all'infinito. Definita la mappa

$$\mathcal{RD}: L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n), f \mapsto (\mathcal{RD})f$$

è dunque naturale chiedersi se per una generica $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ la successione $\{(\mathcal{RD})^k f\}_{k \in \mathbb{N}}$ converga in $L^p(\mathbb{R}^n)$. A tale problema risponde in modo affermativo il seguente teorema, [2] e [6, 4.6]. In questo senso si dice che le simmetrie date da \mathcal{R} e da \mathcal{D} sono *in competizione*, poiché operano in direzioni differenti per raggiungere la funzione limite. Si osservi che la funzione limite deve essere invariante sia rispetto a \mathcal{R} , cioè radiale debolmente decrescente, sia rispetto a \mathcal{D} , e in effetti assume la forma data dal Lemma 3.2. Nel Capitolo 4 si dimostrerà la versione del Teorema 1.1 con la costante ottimale quale corollario del seguente

Teorema 3.3 (Simmetrie in competizione). *Sia $1 < p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$, \mathcal{R} e \mathcal{D} come in (3.3) e (3.8) rispettivamente. Allora la successione definita da $f_k := (\mathcal{RD})^k f$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ converge ad $h_f := \|f\|_p h$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$, dove*

$$h(x) = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \left(\frac{2}{1 + \|x\|^2} \right)^{n/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.9)$$

Dimostrazione. Mostriamo innanzitutto che è sufficiente provare il teorema per un sottoinsieme denso di $L^p(\mathbb{R}^n)$. Dato $\varepsilon > 0$ siano $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tali che $\|f - g\|_p < \varepsilon/2$. Per cambio variabile utilizzando (2.5) si trova che $\|h\|_p = 1$, quindi

$$\|h_f - h_g\|_p = \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right| \|h\|_p < \varepsilon/2. \quad (3.10)$$

Dalla definizione di \mathcal{D} (3.8) e usando (2.9) e (2.10) si ottiene

$$\|\mathcal{D}f - \mathcal{D}g\|_p = \|f - g\|_p, \quad (3.11)$$

mentre per il teorema di non-espansività dei riarrangiamenti [6, 3.5]

$$\|\mathcal{R}f - \mathcal{R}g\|_p \leq \|f - g\|_p, \quad (3.12)$$

dunque

$$\|\mathcal{RD}f - \mathcal{RD}g\|_p \leq \|f - g\|_p. \quad (3.13)$$

Allora per la definizione di f_k si ha

$$\|f_{k+1} - g_{k+1}\|_p \leq \|f_k - g_k\|_p \leq \dots \leq \|f - g\|_p \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (3.14)$$

Dalla disuguaglianza triangolare e applicando (3.10) e (3.14) si ottiene

$$\|h_f - f_k\|_p \leq \|h_f - h_g\|_p + \|f_k - g_k\|_p + \|h_g - g_k\|_p < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 + \|h_g - g_k\|_p = \varepsilon + \|h_g - g_k\|_p.$$

Quindi se $g_k \rightarrow h_g$ in norma p anche $f_k \rightarrow h_f$ in norma p . È possibile allora limitarsi al caso di $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $f \geq 0$ limitata a supporto compatto perché tali funzioni sono dense in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Poiché $h_f > 0$ esiste $C > 0$ tale che

$$f(x) \leq Ch_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (3.15)$$

È immediato verificare che \mathcal{D} rispetta l'ordine, ovvero se $f \leq g$ su \mathbb{R}^n allora $\mathcal{D}f \leq \mathcal{D}g$ su \mathbb{R}^n . Ciò è vero anche per \mathcal{R} , infatti se $f \leq g$ su \mathbb{R}^n i sopralivelli di g contengono quelli di f , e così i riarrangiamenti simmetrici dei sopralivelli, quindi $\mathcal{R}f \leq \mathcal{R}g$ su \mathbb{R}^n . Ora h_f è invariante rispetto a \mathcal{D} per il Lemma 3.2 e rispetto a \mathcal{R} perché radiale decrescente. Quindi applicando ripetutamente $\mathcal{R}\mathcal{D}$ alla disuguaglianza (3.15) si trova che essa rimane valida per tutta la successione,

$$f_k(x) \leq Ch_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall k \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

ovvero $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata da $Ch_f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Inoltre per $k \geq 1$ f_k è radiale debolmente decrescente (poiché \mathcal{R} viene applicato dopo \mathcal{D} a ciascuna iterazione), dunque per il principio di selezione di Helly, si vedano [9, Esercizio 7.13] e [6, p. 89], $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ ammette sottosuccessione $\{f_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ convergente quasi ovunque a una funzione g . Poiché da (3.16) per ogni $l \in \mathbb{N}$ $f_{k_l} \leq Ch_f$ su \mathbb{R}^n , per convergenza dominata [6, 1.8] $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, g è radiale debolmente decrescente e $\{f_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ converge a g in norma p . Sia

$$A := \inf_{k \in \mathbb{N}} \|h_f - f_k\|_p,$$

da (3.14) segue che $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} \|h_f - f_k\|_p$, in particolare

$$A = \lim_{l \rightarrow +\infty} \|h_f - f_{k_l}\|_p = \|h_f - g\|_p. \quad (3.17)$$

Mostriamo ora che $g = h_f$. Per (3.13) $\|\mathcal{R}\mathcal{D}g - f_{k_{l+1}}\|_p \leq \|g - f_{k_l}\|_p$, ma $f_{k_l} \rightarrow g$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, quindi vale anche

$$\mathcal{R}\mathcal{D}g = \lim_{l \rightarrow +\infty} f_{k_{l+1}} \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n). \quad (3.18)$$

Allora applicando nell'ordine (3.17), (3.18), (3.12) e (3.11) si trova

$$\|h_f - g\|_p = A \leq \|h_f - \mathcal{R}\mathcal{D}g\|_p = \|\mathcal{R}\mathcal{D}h_f - \mathcal{R}\mathcal{D}g\|_p \leq \|\mathcal{D}h_f - \mathcal{D}g\|_p = \|h_f - \mathcal{D}g\|_p = \|h_f - g\|_p$$

quindi devono essere tutte uguaglianze, in particolare $\|h_f - \mathcal{R}\mathcal{D}g\|_p = \|h_f - \mathcal{D}g\|_p$. Poiché h_f è radiale strettamente decrescente e la funzione $x \mapsto x^p$ per $p > 1$ è strettamente convessa, la condizione di uguaglianza nel teorema di non-espansività dei riarrangiamenti [6, 3.9] impone $\mathcal{R}\mathcal{D}g = \mathcal{D}g$, ovvero $\mathcal{D}g$ è radiale debolmente decrescente. Ma allora, poiché g era già radiale, per il Lemma 3.2 deve essere $g = kh$ per qualche $k \in \mathbb{C}$. Poiché

$$\|g\|_p = \lim_{l \rightarrow +\infty} \|f_{k_l}\|_p = \|f\|_p,$$

$k = \|f\|_p$ e quindi $g = h_f$. Da (3.17) si ha $A = 0$, perciò $f_{k_l} \rightarrow h_f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ma per (3.14)

$$\|h_f - f_{k_l+m}\|_p \leq \|h_f - f_{k_l}\|_p \quad \forall l, m \in \mathbb{N}$$

quindi tutta la successione $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge ad h_f in $L^p(\mathbb{R}^n)$. \square

Capitolo 4

Dimostrazione di HLS con la costante ottimale

In questo capitolo conclusivo si calcola la costante ottimale $C(n, \lambda)$ per la disuguaglianza di HLS nel caso $p = r = 2n/(2n - \lambda)$ sfruttandone la caratterizzazione (3.2). Per questo calcolo si fa riferimento alla prima parte della dimostrazione di Lieb in [5, p. 360].

Inoltre, seguendo la dimostrazione di Carlen e Loss in [2, pp. 445-446] così come è ripresa in [6, 4.7 e 4.8], si dimostra che funzioni ottimali esistono e sono tutte e sole della forma (1.3), ovvero sono tutte e sole le trasformazioni conformi della funzione h definita in (3.9).

Per brevità nel seguito verrà omissa l'apice $*$ e si scriverà Cf per indicare C^*f con $C \in \mathcal{C}$.

Costante ottimale Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ a valori reali, $f \geq 0$, $f \not\equiv 0$ e $\mathcal{H}(f)$ come in (3.1). Siano

$$f_m := \min\{f, mh_f\} \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

La successione $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è crescente e converge puntualmente a f per $m \rightarrow +\infty$, dunque per convergenza monotona [6, 1.6] $\mathcal{H}(f_m) \rightarrow \mathcal{H}(f)$ per $m \rightarrow +\infty$. Per calcolare l'estremo superiore di $\mathcal{H}(f)$ al variare di f come sopra è allora sufficiente calcolarlo per $\mathcal{H}(f_m)$, $m \in \mathbb{N}$, ovvero limitarsi al caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tale che esiste $M > 0$ per cui

$$f(x) \leq Mh_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Siano $f_k := (\mathcal{RD})^k f$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, da (3.4) e (3.5) si ha $\mathcal{H}(f) \leq \mathcal{H}(\mathcal{RD}f)$, quindi la successione di numeri reali $\{\mathcal{H}(f_k)\}_{k \in \mathbb{N}}$ è crescente. Ora $f_k \rightarrow h_f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$ per il Teorema 3.3, quindi esiste una sottosuccessione $\{f_{k_l}\}_{l \in \mathbb{N}}$ che converge quasi ovunque ad h_f . Inoltre da (4.1) e (3.16) $f_{k_l}(x) \leq Mh_f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \forall l \in \mathbb{N}$ per una $M > 0$. Allora per convergenza dominata $\mathcal{H}(f_{k_l})$ converge in modo monotono ad $\mathcal{H}(h_f)$. Così si trova $C(n, \lambda) \equiv \mathcal{H}(h_f)$, e tale espressione si può ora calcolare esplicitamente per ottenere (1.2). Siano per brevità $f_{n/p}(x) := (1 + \|x\|^2)^{-n/p}$,

così che $h_f = \|f\|_p h = \|f\|_p \frac{f_{n/p}}{\|f_{n/p}\|_p}$, e $g_\lambda(x) = \|x\|^{-\lambda}$. Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(h_f) &= \frac{1}{\|h_f\|_p^2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \|f\|_p h(x) \|x - y\|^{-\lambda} \|f\|_p h(y) dx dy = \\ &= \frac{1}{\|f_{n/p}\|_p^2} \int_{\mathbb{R}^n} f_{n/p}(x) \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_{n/p}(y) \|x - y\|^{-\lambda} dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{\|f_{n/p}\|_p^2} \int_{\mathbb{R}^n} f_{n/p}(x) [f_{n/p} * g_\lambda](x) dx = \frac{1}{\|f_{n/p}\|_p^2} \|f_{n/p} \cdot [f_{n/p} * g_\lambda]\|_1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Ora, per $\mu > 0$, f_μ ha trasformata di Fourier [5, formula 3.11]

$$\mathcal{F}(f_\mu)(\xi) = \frac{\pi^{n/2} 2^{1-\mu+n/2}}{\Gamma(\mu)} \|\xi\|^{\mu-n/2} K_{\mu-n/2}(\|\xi\|),$$

dove $K_\alpha(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh(\alpha t) dt$ è la funzione di Bessel modificata del secondo tipo [14], che verifica $K_\alpha(x) = K_{-\alpha}(x)$. Quindi poiché $n/p = n - \lambda/2$ la trasformata di Fourier di $f_{n/p}$ è

$$\mathcal{F}(f_{n/p})(\xi) = \frac{\pi^{n/2} 2^{1-n/2+\lambda/2}}{\Gamma(n-\lambda/2)} \|\xi\|^{n/2-\lambda/2} K_{n/2-\lambda/2}(\|\xi\|).$$

La trasformata di Fourier di g_λ [13] è invece

$$\mathcal{F}(g_\lambda)(\xi) = \|\xi\|^{\lambda-n} \frac{\pi^{n/2} 2^{n-\lambda} \Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(\lambda/2)}$$

e per un fissato $x \in \mathbb{R}^n$ tramite cambio variabile $g_{\lambda,x}(y) := g_\lambda(x-y)$ ha trasformata

$$\mathcal{F}(g_{\lambda,x})(\xi) = e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}(g_\lambda)(\xi).$$

Allora applicando il teorema di convoluzione [6, 5.8] e la formula di inversione [6, 5.5],

$$\begin{aligned} (f_{n/p} * g_\lambda)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{n/p}(y) g_\lambda(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}(f_{n/p})(\xi) \mathcal{F}(g_\lambda)(\xi) d\xi = \\ &= \pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \frac{\pi^{n/2} 2^{1-\lambda/2+n/2}}{\Gamma(\lambda/2)} \|\xi\|^{\lambda/2-n/2} K_{n/2-\lambda/2}(\|\xi\|) d\xi = \\ &= B_{n,\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi \cdot x} \mathcal{F}(f_{\lambda/2})(\xi) d\xi = B_{n,\lambda} f_{\lambda/2}(x) = B_{n,\lambda} f_{n/p}^{p-1}(x). \end{aligned}$$

dove $B_{n,\lambda} := \pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)}$. Così se q è l'esponente coniugato di p , cioè $1/p + 1/q = 1$,

$$|f_{n/p} * g_\lambda|^q(x) = B_{n,\lambda}^q f_{n/p}^{(p-1)q}(x) = B_{n,\lambda}^q f_{n/p}^p(x).$$

Allora per la condizione di uguaglianza nella disuguaglianza di Hölder [6, 2.3] l'ultima espressione in (4.2) si riscrive come

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(h_f) &= \frac{1}{\|f_{n/p}\|_p^2} \|f_{n/p} \cdot [f_{n/p} * g_\lambda]\|_1 = \frac{1}{\|f_{n/p}\|_p^2} \|f_{n/p}\|_p \|f_{n/p} * g_\lambda\|_q = \\ &= B_{n,\lambda} \|f_{n/p}\|_p^{p/q-1} = B_{n,\lambda} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f_{n/p}^p(x) dx \right]^{1/q-1/p} = \\ &= B_{n,\lambda} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i0 \cdot x} (1 + \|x\|^2)^{-n} dx \right]^{1/q-1/p} = B_{n,\lambda} [\mathcal{F}(f_n)(0)]^{1/q-1/p} = \\ &= \pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left[\pi^{n/2} \frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{\lambda/n-1} = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{\lambda/n-1} \end{aligned}$$

da cui $C(n, \lambda) = \mathcal{H}(h_f) = \pi^{\lambda/2} \frac{\Gamma(n/2 - \lambda/2)}{\Gamma(n - \lambda/2)} \left[\frac{\Gamma(n/2)}{\Gamma(n)} \right]^{\lambda/n-1}$ come voluto in (1.2).

Funzioni ottimali Restano ora da determinare le funzioni ottimali. Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ una di esse, quindi $\mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(h_f)$. Come già osservato nella Sezione 3.2, per la condizione di uguaglianza nella disuguaglianza di Riesz sui riarrangiamenti f deve essere traslata di una funzione radiale decrescente. Inoltre da (3.5) $\mathcal{H}(\mathcal{D}f) = \mathcal{H}(f) = \mathcal{H}(h_f)$, quindi anche $\mathcal{D}f$ è una funzione ottimale ed è dunque traslata di una radiale decrescente. Allora il riarrangiamento simmetrico $\mathcal{RD}f$ di $\mathcal{D}f$ non fa che traslare $\mathcal{D}f$ nell'origine. Ma poiché le traslazioni sono mappe conformi e $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$, $\mathcal{RD}f$ è una trasformazione conforme di f . Iterando questo argomento si trova che ogni termine della successione $f_k = (\mathcal{RD})^k f$, $k \in \mathbb{N}$ è una trasformazione conforme del precedente (e di f) ed è quindi una funzione ottimale per (3.5). Allora si può scrivere $f_k = C_k f$ con C_k composizione di k trasformazioni conformi per ogni $k \in \mathbb{N}$. Ora per il Teorema 3.3 $C_k f \rightarrow h_f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$, ovvero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|C_k f - h_f\|_p = 0. \quad (4.3)$$

Ma per (2.2) le mappe conformi agiscono come isometrie su $L^p(\mathbb{R}^n)$, quindi $\|C_k f - h_f\|_p = \|f - C_k^{-1} h_f\|_p$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, che applicato a (4.3) dà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f - C_k^{-1} h_f\|_p = 0. \quad (4.4)$$

Per il Lemma 4.1 sottostante [6, 4.8] applicato a ciascuna delle C_k^{-1} esistono due successioni $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\{a_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ tali che

$$(C_k^{-1} h_f)(x) = \|f\|_p |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma_k^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma_k^2 + \|x - a_k\|^2} \right)^{n/p}.$$

Poiché per (4.4) $C_k^{-1} h_f \rightarrow f$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$ per $k \rightarrow +\infty$, deve essere $\gamma_k \rightarrow \gamma$ e $a_k \rightarrow a$ per $k \rightarrow +\infty$ per qualche $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$, quindi

$$f(x) = \|f\|_p |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma^2 + \|x - a\|^2} \right)^{n/p}.$$

Ponendo $A := \|f\|_p |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} 2^{n/p}$ e poiché $n/p = (2n - \lambda)/2$,

$$f(x) = A(\gamma^2 + \|x - a\|^2)^{-(2n - \lambda)/2}$$

come voluto in (1.3). □

Lemma 4.1 (Azione del gruppo conforme sulle funzioni ottimali). *Sia $C \in \mathcal{C}$ e h come in (3.9). Se C agisce su h secondo (2.1), allora esistono $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ e $a \in \mathbb{R}^n$ (dipendenti da C) tali che*

$$(Ch)(x) = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma^2 + \|x - a\|^2} \right)^{n/p}.$$

Dimostrazione. Poiché come già osservato il gruppo conforme è generato da isometrie, riscalamento e inversione rispetto alla sfera unitaria, è sufficiente provare il risultato per tali trasformazioni separatamente. Innanzitutto h ha simmetria radiale, dunque è invariante per rotazioni di centro l'origine e per riflessioni rispetto all'origine, ovvero è invariante rispetto al gruppo ortogonale. Se si applica ad h una traslazione $\mathcal{T}_a: x \mapsto x + a$, $a \in \mathbb{R}^n$ si ottiene $(\mathcal{T}_a h) = h(x - a)$, dunque il risultato è vero per $\gamma = 1$. Poiché il gruppo ortogonale e le traslazioni generano tutte le isometrie di \mathbb{R}^n in sé, la tesi è dimostrata per le isometrie.

Sia $\mathcal{S}_\gamma: x \mapsto \gamma x$ il riscalamento di fattore $\gamma \neq 0$, allora

$$\begin{aligned} (\mathcal{S}_\gamma h)(x) &= |\det \mathbf{J} \mathcal{S}_\gamma^{-1}(x)|^{1/p} h\left(\frac{x}{\gamma}\right) = \left|\frac{1}{\gamma}\right|^{n/p} |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \left(\frac{2}{1 + \|x/\gamma\|^2}\right)^{n/p} = \\ &= |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \frac{1}{\gamma^{n/p}} \left(\frac{2\gamma^2}{\gamma^2 + \|x\|^2}\right)^{n/p} = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma^2 + \|x\|^2}\right)^{n/p} \end{aligned}$$

quindi per i riscalamenti la tesi è verificata per $a = 0$.

Sia infine $\mathcal{I}: x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$ l'inversione rispetto alla sfera unitaria, resta da mostrare che una funzione del tipo

$$u(x) = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma^2 + \|x - a\|^2}\right)^{n/p}$$

è trasformata da \mathcal{I} in una funzione della medesima forma. Poiché $\mathcal{I}^{-1} = \mathcal{I}$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}u)(x) &= |\det \mathbf{J} \mathcal{I}(x)|^{1/p} u(\mathcal{I}x) = \left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)^{n/p} |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left(\frac{2}{\gamma^2 + \|x/\|x\|^2 - a\|^2}\right)^{n/p} = \\ &= |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \gamma^{n/p} \left[\frac{2}{\|x\|^2(\gamma^2 + \|x/\|x\|^2 - a\|^2)}\right]^{n/p} \end{aligned} \quad (4.5)$$

Si consideri ora l'espressione al denominatore tra le parentesi quadre,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 \left(\gamma^2 + \left\|\frac{x}{\|x\|^2} - a\right\|^2\right) &= 1 + \|x\|^2(\|a\|^2 + \gamma^2) - 2x \cdot a = \\ &= (\|a\|^2 + \gamma^2) \left(\frac{\gamma^2}{(\|a\|^2 + \gamma^2)^2} + \frac{\|a\|^2}{(\|a\|^2 + \gamma^2)^2} + \|x\|^2 - \frac{2x \cdot a}{\|a\|^2 + \gamma^2}\right) = \\ &= (\|a\|^2 + \gamma^2) \left(\frac{\gamma^2}{(\|a\|^2 + \gamma^2)^2} + \left\|x - \frac{a}{\|a\|^2 + \gamma^2}\right\|^2\right). \end{aligned}$$

Inserendo quest'ultima in (4.5) e definendo $b := \frac{a}{\|a\|^2 + \gamma^2}$ e $\mu := \frac{\gamma}{\|a\|^2 + \gamma^2}$ si ottiene

$$(\mathcal{I}u)(x) = |\mathbb{S}^n|^{-1/p} \mu^{n/p} \left(\frac{2}{\mu^2 + \|x - b\|^2}\right)^{n/p}. \quad \square$$

Lista dei simboli

A^*	riarrangiamento simmetrico di $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$B^n(x, r)$	palla aperta in \mathbb{R}^n di centro x e raggio r
\mathcal{C}	gruppo conforme su \mathbb{R}^n
\mathbb{C}	insieme dei numeri complessi
\mathcal{D}	rotazione di $\pi/2$ su \mathbb{S}^n
$\det M$	determinante della matrice M
$\mathcal{F}(f)$	trasformata di Fourier di f
$f * g$	convoluzione delle funzioni f e g
$\{f > a\}$	insieme di sopralivello $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > a\}$
\mathcal{H}	funzionale di HLS
\mathcal{I}	inversione rispetto alla sfera unitaria in \mathbb{R}^n
$J\gamma$	matrice jacobiana della mappa differenziabile $\gamma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$
$K_\alpha(x)$	funzione di Bessel modificata del secondo tipo
\mathcal{L}^n	σ -algebra degli insiemi Lebesgue-misurabili su \mathbb{R}^n
$L^p(\mathbb{R}^n)$	spazio delle funzioni a p -esima potenza integrabili su \mathbb{R}^n
$L_w^p(\mathbb{R}^n)$	spazio debole $L^p(\mathbb{R}^n)$
$m(A)$	misura di Lebesgue di $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$O(n)$	gruppo ortogonale delle isometrie in \mathbb{R}^n che fissano l'origine
\mathbb{R}	insieme dei numeri reali
\mathbb{R}^n	spazio euclideo n -dimensionale
$\overline{\mathbb{R}^n}$	compattificazione a un punto di \mathbb{R}^n , $\overline{\mathbb{R}^n} = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$
$\mathcal{R}f$	riarrangiamento simmetrico decrescente di f
\mathbb{S}^n	sfera unitaria n -dimensionale in \mathbb{R}^{n+1}
$ \mathbb{S}^{n-1} $	misura di Lebesgue della sfera unitaria $(n-1)$ -dimensionale in \mathbb{R}^n
\mathcal{S}	proiezione stereografica di $\overline{\mathbb{R}^n}$ in \mathbb{S}^n
χ_A	funzione caratteristica di $A \subseteq \mathbb{R}^n$
$ x $	valore assoluto di $x \in \mathbb{C}$
$\ x\ $	norma euclidea di $x \in \mathbb{R}^n$
$x \cdot y$	prodotto scalare standard di $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\Gamma(n)$	funzione Gamma di Eulero

Bibliografia

- [1] P. Alexandroff. Über die metrisation der im kleinen kompakten topologischen räume. *Mathematische Annalen*, 92:294–301, 1924.
- [2] E. Carlen and M. Loss. Extremals of functionals with competing simmetries. *Journal of Functional Analysis*, 88:437–456, 1990.
- [3] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. Some properties of functional integrals. *Mathematische Zeitschrift*, 27:565–606, 1928.
- [4] G. H. Hardy and J. E. Littlewood. On certain inequalities connected with the calculus of variations. *Journal of the London Mathematical Society*, 5:34–39, 1930.
- [5] E. H. Lieb. Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities. *Annals of Mathematics*, 118:349–374, 1983.
- [6] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis, Second Edition*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [7] J. Liouville. Extension au cas des trois dimensions de la question du trace géographique. In G. Monge, *Application de l'Analyse à la Géométrie, Cinquième Édition* [Nota VI dell'Appendice], pages 609–616. Bachelier, Paris, 1850.
- [8] F. Riesz. Sur une inégalité intégral. *Journal of the London Mathematical Society*, 5:162–168, 1930.
- [9] W. Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1953.
- [10] W. Rudin. *Real and Complex Analysis, Third Edition*. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [11] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *Matematicheskii Sbornik*, 4:471–479, 1938. [Originale russo].
- [12] S. L. Sobolev. On a theorem of functional analysis. *American Mathematical Society Traslations: Series 2*, 34:39–68, 1963. [Traduzione inglese].
- [13] E. M. Stein and G. Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, chapter IV, Theorem 4.1, pages 160–162. Princeton University Press, 1971.
- [14] G. N. Watson. *A Treatise on the Theory of Bessel functions*, chapter 6.22, pages 181–183. Cambridge University Press, 1922.

