



Università degli Studi di Padova

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA “TULLIO LEVI-CIVITA”

Corso di Laurea Triennale in Matematica

TITOLO

Dalla disuguaglianza di Sobolev sharp
alla disuguaglianza di Sobolev logaritmica

Relatore:

Prof. Roberto Monti

Laureando: Salvatore Simone Spadaro

Matricola: 2043578

Anno Accademico 2023–2024

20/09/2024

Indice

Introduzione	2
1 La disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp	4
1.1 La proiezione stereografica	5
1.2 Azione del gruppo conforme sulla disuguaglianza di Sobolev .	7
1.3 Tecnica delle simmetrie in competizione e dimostrazione della disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp	8
2 La disuguaglianza di Sobolev logaritmica	16
2.1 Osservazioni preliminari	16
2.2 Dimostrazione della disuguaglianza di Sobolev logaritmica . .	18
Bibliografia	22

Introduzione

Con il termine "disuguaglianza di Sobolev" si è soliti riferirsi ad un'ampia famiglia di disuguaglianze che cercano di dare una stima dall'alto di una funzione con una certa regolarità tramite il suo gradiente. Prendiamo ad esempio il caso uno dimensionale: sia $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$. Si può allora dimostrare:

$$\|f\|_\infty \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(s)| ds, \quad (1)$$

E' naturale chiedersi come si possa generalizzare questo risultato in dimensioni più alte. Cerchiamo cioè una disuguaglianza del tipo:

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p, \quad \forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad (2)$$

per certi p, q e $C > 0$.

Fissiamo innanzitutto $t > 0$ e $f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e usiamo la (2) sulla funzione $f(tx)$. Tramite un breve conto scopriamo allora che

$$t^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 1} \|f\|_q \leq \|\nabla f\|_p. \quad (3)$$

Ma se $\frac{n}{p} - \frac{n}{q} - 1 \neq 0$, facendo tendere t a 0 o a $+\infty$ (a seconda che risulti positivo o negativo) riusciamo facilmente a falsificare la disuguaglianza in (2). Concludiamo che dato $p > 0$ necessariamente si vuole $q = \frac{np}{n-p}$ (q è detto coniugato di Sobolev). Tuttavia questa è solamente una condizione necessaria: non è detto che la disuguaglianza di sopra valga per ogni coppia di coniugati di Sobolev (p, q) . Come controesempio si può infatti considerare il caso $n = 2, p = 2$, che con le usuali convenzioni porterebbe ad affermare che esiste $C > 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \|f\|_\infty \leq C \|\nabla f\|_2.$$

Prendiamo però in esame la seguente funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \log(|\log(|x|)|) & \text{se } |x| \leq \frac{1}{e} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La f chiaramente non è limitata mentre $\|\nabla f\|_2 = 2\pi$. Si potrebbe obiettare che la $f \notin \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, tuttavia possiamo trovare lo stesso un assurdo

approssimandola con una successione di funzioni $f_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tali che $\|\nabla f_n\|_2 \rightarrow \|\nabla f\|_2$ e $f_n \rightarrow f$.

La questione su come generalizzare la (1) è stata approfondita dal matematico russo Sergei Lvovich Sobolev che nel 1938 ha pubblicato il seguente teorema:

Teorema 0.0.1. *Sia $n \geq 2$, $1 < p < n$ un numero reale e q il suo coniugato di Sobolev. Allora esiste una costante C che dipende solo da n e p tale che:*

$$\forall f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p.$$

La stessa disuguaglianza è stata poi dimostrata anche nel caso $p = 1$ in maniera indipendente da E. Gagliardo e L. Nirenberg nel 1958.

I lavori del matematico russo hanno influenzato notevolmente la matematica della seconda metà del Novecento, in particolare si è sviluppato notevolmente lo studio dell'ampia classe di disuguaglianze di Sobolev. Questo tipo di stime è diventato nel tempo uno strumento essenziale in molti ambiti dell'analisi, dallo studio dell'esistenza e della regolarità di soluzioni per certe equazioni alle derivate parziali al calcolo variazionale.

Del Teorema 0.0.1 ci sono molte dimostrazioni diverse, la maggior parte delle quali si occupa unicamente di dimostrare la disuguaglianza, senza dare particolare attenzione alla costante C . Nel primo capitolo noi ci proporremo un obiettivo più ambizioso: limitandoci al caso $p = 2$, dimostreremo la disuguaglianza di Sobolev con la costante ottimale, ossia la minima costante C tale per cui il teorema resta vero. Troveremo anche la famiglia di funzioni estremali (scoperte da Giorgio Talenti nel 1975), ossia la classe di funzioni tali per cui la disuguaglianza è in realtà un'uguaglianza. Conviene notare fin da subito che per svolgere propriamente questo compito sarà per noi necessario analizzare e approfondire le simmetrie che la disuguaglianza di Sobolev presenta. In particolare, la geometria conforme e la proiezione stereografica giocheranno un ruolo fondamentale: basti pensare che le funzioni di Talenti nascono tramite una traslazione ed un riscaldamento dal fattore d'area della proiezione stereografica.

Nel secondo capitolo introdurremo le nozioni di entropia di una funzione e di misura gaussiana, strumenti molto sviluppati nella teoria della probabilità che qui useremo per enunciare la disuguaglianza di Sobolev logaritmica:

Teorema 0.0.2. *Per ogni funzione $f \in C_0^1(\mathbb{R}^k)$ vale:*

$$Ent(f) \leq \int_{\mathbb{R}^k} |\nabla f|^2 d\gamma. \quad (4)$$

Nella dimostrazione che presenteremo, useremo in maniera cruciale la disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp e le sue funzioni estremali. Ad esempio, mostreremo come la misura gaussiana può essere ottenuta come limite di misure assolutamente continue che hanno come derivata di Radon-Nykodim una funzione di Talenti (a meno di una costante moltiplicativa e di un esponente).

Capitolo 1

La disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp

In questo capitolo ci occuperemo di dimostrare il seguente teorema:

Teorema 1.0.1. *Sia $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ una funzione con $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ (dove $2^* = \frac{2n}{n-2}, n \geq 3$). Allora vale la disuguaglianza:*

$$\|f\|_{2^*} \leq \sqrt{C_n} \|\nabla f\|_2, \quad (1.1)$$

dove C_n è la costante ottimale:

$$C_n = \frac{4}{n(n-2)} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{\frac{2}{n}}, \quad (1.2)$$

con $\alpha_n = \mathbb{H}^n(\mathbb{S}^n)$ misura della superficie totale della sfera unitaria n -dimensionale. Infine si ha uguaglianza in (1.1) per tutte e sole (a meno di un fattore moltiplicativo costante) le funzioni $f_{\lambda, x_0}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ così definite:

$$f_{\lambda, x_0}(x) = \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \quad (1.3)$$

dove $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\lambda \geq 0$. Queste vengono anche chiamate funzioni di Talenti.

Osservazione 1. Supponiamo che per ogni $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ esista una costante $C > 0$ tale che $\|f\|_p \leq C \|\nabla f\|_2$. Allora necessariamente $p = \frac{2n}{n-2}$.

Dim. Definiamo per ogni $t > 0$ $f_t(x) := f(tx)$, allora tramite un cambio di variabili osserviamo che $\|f_t\|_p = t^{-\frac{n}{p}} \|f\|_p$ e che $\|\nabla f_t\|_2 = t^{1-\frac{n}{2}} \|\nabla f\|_2$. Infatti:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(tx)|^p dx &= t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|^p dy \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f_t(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |t \nabla f(tx)|^2 dx = t^{2-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(y)|^2 dy. \end{aligned}$$

Dunque vale che per ogni $t > 0$, $t^{\frac{np-2n-2p}{2p}} \|f\|_p \leq \|\nabla f\|_2$.
 Se per assurdo $\frac{np-2n-2p}{2p} > 0$, facendo tendere $t \rightarrow +\infty$ siamo sicuri di trovare $\hat{t}$ tale che la disuguaglianza di partenza fallisca per $f_{\hat{t}}$. Con un argomento analogo scopriamo che necessariamente $\frac{np-2n-2p}{2p} = 0$, da cui segue la tesi. $\square$

Per dimostrare il teorema ci baseremo sulla tecnica delle simmetrie in competizione, che descriveremo più in dettaglio nel secondo paragrafo. Per ora basti sapere che sarà di fondamentale importanza lo studio delle trasformazioni sotto cui la nostra disuguaglianza è invariante. Per fare questo, più volte risulterà comodo guardare il problema da un'altra prospettiva, quella della sfera. Iniziamo dunque introducendo la proiezione stereografica e alcune sue proprietà.

1.1 La proiezione stereografica

Definizione 1.1.1. Sia $\mathbb{S}^n := \{\xi \in \mathbb{R}^{n+1} : |\xi| = 1\}$ la sfera unitaria n -dimensionale, $N = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^n$ il polo nord. Allora definiamo la proiezione stereografica $S^{-1} : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$

$$S^{-1}(\xi) = \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_{n+1}}, \dots, \frac{\xi_n}{1 - \xi_{n+1}} \right), \quad \xi \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$$

e la mappa inversa $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$

$$S(x) = \left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{2x_n}{|x|^2 + 1}, \frac{|x|^2 - 1}{|x|^2 + 1} \right). \quad (1.4)$$

Indicheremo con $JS(x)$ la matrice Jacobiana di S nel punto $x \in \mathbb{R}^n$.

Proposizione 1.1.2. La mappa $S(x)$ è conforme e vale:

$$\langle JS(x)v, JS(x)w \rangle = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2 \langle v, w \rangle \quad (1.5)$$

per ogni $x, v, w \in \mathbb{R}^n$. In modo analogo si ha che per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, per ogni $V, W \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\langle JS(x)^T V, JS(x)^T W \rangle = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2 \langle V, W \rangle. \quad (1.6)$$

Dim. Tramite un conto si vede che

$$JS(x)^T JS(x) = \left(\frac{2}{1 + |x|^2} \right)^2 I_n, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

dove I_n è la matrice identica $n \times n$. Allora

$$\begin{aligned}\langle JS(x)v, JS(x)w \rangle &= v^T JS(x)^T JS(x)w \\ &= \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^2 (v^T I_n w) \\ &= \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^2 \langle v, w \rangle.\end{aligned}$$

La (1.6) si dimostra allo stesso modo. $\square$

Denotiamo d'ora in poi il fattore d'area della mappa S con

$$J_S(x) = \sqrt{\det \left(JS(x)^T JS(x) \right)} = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^n. \quad (1.7)$$

Se poniamo $\xi = S(x) \in \mathbb{S}^n$, indichiamo con $d\xi$ l'elemento di superficie standard su $\mathbb{S}^n$ e grazie alle definizioni sugli integrali di superficie potremo scrivere:

$$d\xi = J_S(x)dx. \quad (1.8)$$

Introduciamo ora la seguente funzione:

$$h(x) = \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = J_S(x)^{\frac{1}{2^*}}. \quad (1.9)$$

Proposizione 1.1.3. *La funzione h definita in (1.9) verifica l'equazione di Yamabe, ossia vale:*

$$\Delta h = -\frac{n(n-2)}{4} h^{\frac{n+2}{n-2}}, \quad (1.10)$$

e dunque:

$$-h\Delta h = \frac{n(n-2)}{4} J_S. \quad (1.11)$$

Dim. Basta verificare i conti. Infatti:

$$\begin{aligned}\partial_i h(x) &= \frac{n-2}{2} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \partial_i \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right) \\ &= \frac{(n-2)}{2} \left(\frac{2}{1+|x|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \left(\frac{-4x_i}{(1+|x|^2)^2} \right) \\ &= (2-n) \frac{2^{\frac{n-2}{2}} x_i}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}}.\end{aligned}$$

Da questo segue poi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} &= (2-n) 2^{\frac{n-2}{2}} \frac{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}} - n(1+|x|^2)^{\frac{n-2}{2}} x_i^2}{(1+|x|^2)^n} \\ &= (2-n) 2^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{1}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} - \frac{nx_i^2}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}+1}} \right).\end{aligned}$$

In conclusione

$$\begin{aligned}\Delta h &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 h}{\partial x_i^2} = -\frac{n(n-2)2^{\frac{n-2}{2}}}{(1+|x|^2)^{\frac{n}{2}}} \left(1 - \frac{|x|^2}{1+|x|^2}\right) = \\ &= -n(n-2) \left(\frac{2}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n+2}{2}} 2^{\frac{n-2}{2} - \frac{n+2}{2}} = -\frac{n(n-2)}{4} h^{\frac{n+2}{n-2}}.\end{aligned}$$

□

1.2 Azione del gruppo conforme sulla disuguaglianza di Sobolev

Iniziamo con una semplice osservazione:

Osservazione 2. Se sostituiamo alla $f(x)$ la sua traslata $f(x+v)$ con $v \in \mathbb{R}^n$, entrambi i lati della (1.1) restano invariati. Possiamo arrivare alla stessa conclusione se consideriamo $T \in \mathcal{O}(n)$ e sostituiamo $f(x)$ con $f(Tx)$.

Dunque, la disuguaglianza in (1.1) è invariante secondo la seguente azione del gruppo delle trasformazioni euclidee:

$$((R, v), f) \rightarrow f(Rx + v),$$

dove $R \in \mathcal{O}(n)$ e $v \in \mathbb{R}^n$.

In realtà, quello che scopriremo in seguito è che la (1.1) è invariante rispetto all'intero gruppo conforme. Il gruppo delle trasformazioni conformi $\mathcal{C}$ è l'insieme delle $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ che preservano gli angoli tra vettori. Grazie al teorema di Liouville (per un riferimento si guardi [7]) sappiamo che è generato dalle trasformazioni euclidee, dalle dilatazioni e dall'inversione, dove quest'ultima è la mappa $\mathcal{I}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tale che $\mathcal{I}(x) = \frac{x}{|x|^2}$. Iniziamo dunque con il definire l'azione di nostro interesse:

Definizione 1.2.1. Sia $\gamma \in \mathcal{C}$, $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. Definiamo l'azione di γ su f come

$$(\gamma, f)(x) := (\gamma^* f)(x) = |\det J_\gamma(x)|^{\frac{1}{2^*}} f(\gamma(x)). \quad (1.12)$$

Nella stessa ottica possiamo definire il sollevamento di una funzione $f \in L^{2^*}$ sulla sfera:

Definizione 1.2.2. Sia $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, definiamo il suo sollevamento sulla sfera come la funzione $F: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(x) = h(x)F(S(x))$.

Prima di dimostrare che la disuguaglianza di Sobolev è invariante secondo l'azione definita sopra, specializziamo la Definizione 1.2.1 ai casi della traslazione, della dilatazione e dell'inversione:

Definizione 1.2.3 (Traslazione). Siano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $b \in \mathbb{R}^n$. Indicheremo l'azione della traslazione di vettore b su f con $f_{(b)}(x) = f(x_1 + b_1, \dots, x_n + b_n)$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Vale che per ogni $p \geq 1, b \in \mathbb{R}^n$:

$$\|f_{(b)}\|_p = \|f\|_p \quad e \quad \|\nabla f_{(b)}\|_p = \|\nabla f\|_p.$$

Definizione 1.2.4 (Riscaldamento). Siano $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $\lambda > 0$. Indicheremo l'azione della dilatazione di parametro λ su f con $f_\lambda(x) = \lambda^{\frac{n-2}{2}} f(\lambda x)$.

Vale che per ogni $\lambda > 0$:

$$\|f_\lambda\|_{2^*} = \|f\|_{2^*} \quad e \quad \|\nabla f_\lambda\|_{2^*} = \|\nabla f\|_{2^*}.$$

Definizione 1.2.5 (Trasformazione di Kelvin). Sia $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione, indicheremo l'azione dell'inversione su f con $f^\# : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f^\#(x) = |x|^{2-n} f\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$.

Vale:

$$\|f^\#\|_{2^*} = \|f\|_{2^*} \quad e \quad \|\nabla f^\#\|_2 = \|\nabla f\|_2.$$

La dimostrazione di questo fatto segue da un conto e dalla Proposizione 1.3.7, per maggiori dettagli si faccia riferimento a [3].

Teorema 1.2.6 (Invarianza conforme della disuguaglianza di Sobolev). Sia $f \in L^{2^*}, \gamma \in \mathcal{C}$. Allora vale che:

1. $\|f\|_{2^*} = \|\gamma^* f\|_{2^*}$
2. $\|\nabla f\|_2 = \|\nabla(\gamma^* f)\|_2$

Dimostrazione. La dimostrazione segue dal fatto che la norma 2^* di f e la norma 2 del suo gradiente sono invarianti per l'azione delle trasformazioni euclidee, delle dilatazioni e dell'inversione (come osservato sopra) e dal teorema di Liouville richiamato in precedenza. $\square$

1.3 Tecnica delle simmetrie in competizione e dimostrazione della disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp

Cominciamo la sezione introducendo brevemente la definizione di riarrangiamento di Schwarz, elencandone qualche proprietà:

Definizione 1.3.1 (Riarrangiamento di Schwarz). Chiamiamo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ l'insieme delle funzioni $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ misurabili con $f \geq 0$ e tali che $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n: f(x) > t\}) < +\infty$ per ogni $t \geq 0$, dove indichiamo con $\mathcal{L}^n(\cdot)$ la misura di Lebesgue n-esima. Allora:

i) Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ insieme misurabile di misura finita. Definiamo il suo insieme simmetrizzato come:

$$A^* = B(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < r\},$$

con $r > 0$ tale che $\mathcal{L}^n(B(r)) = \mathcal{L}^n(A)$.

ii) Data $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definiamo il suo riarrangiamento di Schwarz come:

$$f^*(x) = \int_0^{+\infty} \chi_{\{f>t\}^*}(x) dt.$$

Proposizione 1.3.2. *Siano $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Allora:*

1. *f ha simmetria radiale ed è decrescente lungo la direzione radiale;*
2. *se $f \leq g$ allora $f^* \leq g^*$;*
3. *Per ogni $p \geq 1$, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora:*

$$\|f^*\|_p = \|f\|_p.$$

4. *Per ogni $p \geq 1$, se $\nabla f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora:*

$$\|\nabla f^*\|_p \leq \|\nabla f\|_p.$$

5. *Per ogni $p \geq 1$, se $f, g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ allora:*

$$\|f^* - g^*\|_p \leq \|f - g\|_p. \quad (1.13)$$

Inoltre se $p \neq 1$, $g = g^$ è una funzione strettamente decrescente e vale l'uguaglianza in (1.13), allora $f = f^*$.*

Per maggiori dettagli sui riarrangiamenti si guardi [1] e [3].

L'idea della tecnica delle simmetrie in competizione, ben definita nel Teorema 1.3.5, è quella di prendere una funzione $f \in L^{2^*}$ e, combinando assieme il riarrangiamento di Schwarz e certe particolari trasformazioni conformi, ottenere una successione di funzioni che converge fortemente ad h .

Sia $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Iniziamo introducendo la seguente notazione per le trasformazioni conformi di nostro interesse:

$$Bf = f_{((0,\dots,0,-1))}, \quad \Lambda f = f_{\frac{1}{2}}, \quad Rf = f^*, \quad Kf = f^\#.$$

Chiamiamo Tf la trasformazione:

$$Tf = \Lambda R K B f.$$

Dal Teorema 1.2.6 e dalle proprietà dei riscalamenti segue che:

$$\|Tf\|_{2^*} = \|f\|_{2^*}, \quad \|\nabla(Tf)\|_2 \leq \|\nabla f\|_2. \quad (1.14)$$

Per $k \in \mathbb{N}$ possiamo dunque definire l'iterazione:

$$f_k = T^k f = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_k f \quad (1.15)$$

e dalla (1.14) segue che:

$$\|f_k\|_{2^*} = \|f\|_{2^*}, \quad \|\nabla f_k\|_2 \leq \|\nabla f\|_2. \quad (1.16)$$

Premettiamo alcuni lemmi al Teorema sulle simmetrie in competizione:

Lemma 1.3.3. *La funzione h verifica le seguenti identità:*

1. $h = Th$;
2. $h = \Lambda B_{\frac{1}{2}} K Bh$, dove chiamiamo $f_{(0, \dots, 0, \frac{1}{2})} = B_{\frac{1}{2}} f$.

Dim. Usiamo la notazione $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$. Calcoliamo dunque Th :

$$\begin{aligned} Bh(x) &= \left(\frac{2}{1 + |(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n - 1)|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{2}{1 + |x'|^2 + (x_n - 1)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \\ KBh(x) &= |x|^{2-n} \left(\frac{2}{1 + \frac{|x'|^2}{|x|^4} + \left(\frac{x_n}{|x|^2} - 1 \right)^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= |x|^{2-n} \left(\frac{2|x|^4}{|x|^4 + (x_n - |x|^2)^2 + |x'|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \\ &= \left(\frac{2}{2|x|^2 - 2x_n + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che $KBh(x)$ presenta una simmetria sferica rispetto al punto $(0, \dots, 0, \frac{1}{2})$ e che perciò $B_{\frac{1}{2}} KBh = RKBh$ e quindi:

$$\begin{aligned} B_{\frac{1}{2}} KBh &= \left(\frac{2}{2|(x_1, \dots, x_n + \frac{1}{2})|^2 - 2(x_n + \frac{1}{2}) + 1} \right) = \left(\frac{2}{2|x|^2 + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}}, \\ \Lambda RKBh(x) &= \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n-2}{2}} \left(\frac{2}{2|\frac{x}{2}|^2 + \frac{1}{2}} \right)^{\frac{n-2}{2}} = \left(\frac{2}{|x|^2 + 1} \right)^{\frac{n-2}{2}}. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.3.4. *Sia $g \in L^{2*}(\mathbb{R}^n)$ una funzione non negativa tale che:*

1. $\|g\|_{2*} = \|h\|_{2*};$
2. $g = Rg;$
3. $g = \Lambda B_{\frac{1}{2}} K B g.$

Allora $g = h.$

Dimostrazione. Sia $G: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ il sollevamento di g , dalla 3) segue che

$$G(\xi) = G(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, -\xi_{n+1}, -\xi_n) \quad (1.17)$$

Infatti:

$$\begin{aligned} Bg(x) &= B(h(x)G(S(x))) = [Bh(x)]G(S(x', x_{n-1})), \\ KBg(x) &= [KBh(x)]G\left(S\left(\frac{x'}{|x|^2}, \frac{x_n}{|x|^2} - 1\right)\right) \\ &= [KBh(x)]G\left(\frac{2x_1}{2|x|^2 - 2x_n + 1}, \dots, \frac{2(x_n - |x|^2)}{2|x|^2 - 2x_n + 1}, \frac{1 - 2x_n}{2|x|^2 - 2x_n + 1}\right), \end{aligned}$$

dove l'ultima uguaglianza discende direttamente dalla definizione di $S(x)$ data in (1.4).

Andando avanti:

$$\begin{aligned} B_{\frac{1}{2}} K B g(x) &= [B_{\frac{1}{2}} K B h(x)]G\left(\frac{2x_1}{2|x|^2 + \frac{1}{2}}, \dots, \frac{\frac{1}{2} - 2|x|^2}{2|x|^2 + \frac{1}{2}}, \frac{-2x_n}{2|x|^2 + \frac{1}{2}}\right), \\ \Lambda B_{\frac{1}{2}} K B g(x) &= [\Lambda B_{\frac{1}{2}} K B h(x)]G\left(\frac{2x_1}{|x|^2 + 1}, \dots, \frac{1 - |x|^2}{|x|^2 + 1}, \frac{-2x_n}{|x|^2 + 1}\right). \end{aligned}$$

Ma poichè grazie al Lemma 1.3.3 sappiamo che $\Lambda B_{\frac{1}{2}} K B h(x) = h(x)$, abbiamo dimostrato la (1.17).

Dalla 2) segue invece che G è costante sui paralleli rispetto al polo Nord N . Dimostriamo ora che questo fatto in aggiunta alla (1.17) implica che G è costante su $\mathbb{S}^n$.

Sia $(1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{S}^n$, chiamo $G(1, 0, \dots, 0) = C \in \mathbb{R}$. Osserviamo che dire che $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n+1})$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$ sono sullo stesso parallelo corrisponde a dire che $\xi_{n+1} = \eta_{n+1}$. Dato $\xi \in \mathbb{S}^n$, definiamo $\hat{\xi} = (\hat{\xi}_1, 0, \dots, 0, \xi_{n+1})$ con:

$$\hat{\xi}_1^2 + \xi_{n+1}^2 = 1.$$

Possiamo trovare $\hat{\xi}_1$ poichè $\xi_{n+1} \leq 1$. Dalla (1.17) abbiamo che

$$G(\hat{\xi}_1, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}) = G(\hat{\xi}_1, 0, \dots, -\xi_{n+1}, 0),$$

e usando il fatto che G è costante sui paralleli:

$$\begin{aligned} G(\xi_1, \dots, \xi_{n+1}) &= G(\hat{\xi}_1, 0, \dots, 0, \xi_{n+1}) \\ &= G(\hat{\xi}_1, 0, \dots, -\xi_{n+1}, 0) = G(1, 0, \dots, 0) = C \end{aligned}$$

Dunque $g(x) = Ch(x)$ e la 1) ci garantisce che $C = 1$. $\square$

Lemma 1.3.5 (Teorema di Helly). *Sia $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni reali a valori reali crescente e uniformemente limitata. Allora $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente puntualmente.*

Per vedere le idee della dimostrazione si può fare riferimento a [4].

Teorema 1.3.6 (Simmetrie in competizione). *Sia $f \geq 0$ una funzione in L^{2^*} tale che $\|f\|_{2^*} = \|h\|_{2^*}$. Allora vale:*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = h(x), \quad (1.18)$$

con convergenza in $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Possiamo assumere senza perdere di generalità che la f appartenga ad un qualsiasi insieme denso di L^{2^*} . Infatti se $g \in L^{2^*}$ tale che $\|f - g\|_{2^*} < \epsilon$, allora vale che:

$$\|h - f_k\|_{2^*} \leq \|h - g_k\|_{2^*} + \|g_k - f_k\|_{2^*},$$

e usando la (1.13) e il Teorema 1.2.6 otteniamo

$$\|g_{k+1} - f_{k+1}\|_{2^*} \leq \|g_k - f_k\|_{2^*},$$

da cui segue che $\|h - f_k\|_{2^*} \leq \|h - g_k\|_{2^*} + \epsilon$.

Sia dunque $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. La funzione f è limitata e esiste dunque una costante $C > 0$ tale che $f(x) \leq Ch(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Per dimostrare l'asserto proviamo che da ogni sottosuccessione di $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad h .

Mostriamo innanzitutto che le funzioni f_k definite in (1.15) verificano le seguenti proprietà:

1. $\|f_k\|_{2^*} = \|h\|_{2^*} \quad \forall k \in \mathbb{N}$;
2. $f_k(x) \leq Ch(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$;
3. $f_k = Rf_k$.

La proprietà 1) segue direttamente dalla (1.16). Per la proprietà 2) basta osservare che se $g_1 \leq g_2$ allora $Tg_1 \leq Tg_2$ (è ovvio per il riscaldamento, la traslazione e la trasformazione di Kelvin mentre per il riarrangiamento si

usa la Proposizione 1.3.2). Infine la proprietà 3) segue dal fatto che R e Λ commutano:

$$Rf_k = R\Lambda RKBf_{k-1} = \Lambda R RKBf_{k-1} = \Lambda RKBf_{k-1} = Tf_{k-1} = f_k$$

Dunque le f_k sono radiali, crescenti e uniformemente limitate e perciò dal Lemma 1.3.5 segue che esiste una sottosuccessione (che noi indicheremo ancora con $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$) che converge puntualmente ad una funzione g . Grazie al teorema della convergenza dominata possiamo dire che $f_k \rightarrow g$ in $L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. Per concludere ci basta allora mostrare che $g = h$. Partiamo con l'osservare che g verifica le seguenti proprietà:

i) $\|g\|_{2^*} = \|h\|_{2^*};$

ii) $g = Rg;$

iii) $g = Tg.$

Allora usando il Teorema 1.2.6 e usando la (1.13) troviamo la seguente catena di uguaglianze e disuguaglianze:

$$\begin{aligned} \|h - g\|_{2^*} &= \|Th - Tg\|_{2^*} = \|\Lambda RKBh - \Lambda RKBg\|_{2^*} \\ &= \|RKBh - RKBg\|_{2^*} \leq \|KBh - KBg\|_{2^*} \\ &= \|Bh - Bg\|_{2^*} = \|h - g\|_{2^*}, \end{aligned}$$

e dunque si ottiene:

$$\|RKBh - RKBg\|_{2^*} = \|KBh - KBg\|_{2^*} = \|B_{\frac{1}{2}}KBh - B_{\frac{1}{2}}KBg\|_{2^*}. \quad (1.19)$$

Siccome il riarrangiamento di Schwarz di una funzione e di una sua traslata coincidono, allora $RKBg = RB_{\frac{1}{2}}KBg$. Inoltre dalla dimostrazione del Lemma 1.3.3 si ha che $B_{\frac{1}{2}}KBh = RKBh$ e dunque la (1.19) diventa:

$$\|RKBh - RB_{\frac{1}{2}}KBg\|_{2^*} = \|RKBh - B_{\frac{1}{2}}KBg\|_{2^*}.$$

Usando il punto 5) della Proposizione 1.2.5 abbiamo poi che $RB_{\frac{1}{2}}KBg = B_{\frac{1}{2}}KBg$ e quindi in conclusione:

$$g = Tg = \Lambda RKBg = \Lambda RB_{\frac{1}{2}}KBg = \Lambda B_{\frac{1}{2}}KBg,$$

e quindi dal Lemma 1.3.4 possiamo concludere. $\square$

Prima di dimostrare la disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp, dimostriamo un risultato che ci aiuterà a determinare la costante sharp:

Proposizione 1.3.7. *Sia $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ con $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $F: \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}$ il suo sollevamento sulla sfera. Allora vale*

$$\|f\|_{2^*} = \left(\int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^{2^*} d\xi \right)^{\frac{1}{2^*}}, \quad (1.20)$$

$$\|\nabla f\|_2^2 = \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla F(\xi)|^2 d\xi + \frac{n(n-2)}{4} \int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^2 d\xi, \quad (1.21)$$

dove ∇F è il gradiente tangenziale di F su $\mathbb{S}^n$.

Dimostrazione. Usando che $h(x) = J_S(x)^{\frac{1}{2^*}}$ e la (1.8) troviamo

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^{2^*} d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |F(S(x))|^{2^*} J_S(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |F(S(x))h(x)|^{2^*} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Dunque resta da dimostrare la (1.21). Senza perdere di generalità supponiamo che $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Osserviamo innanzitutto che $\nabla f(x) = \nabla h(x)F(S(x)) + h(x)\nabla F(S(x))J_S(x)$ e dunque, chiamando $\nabla F \circ S = \nabla F$ troviamo:

$$|\nabla f|^2 = (F \circ S)^2 |\nabla h|^2 + 2h(F \circ S) \langle \nabla h, \nabla F J_S \rangle + h^2 |\nabla F J_S|^2.$$

Usando la (1.6) troviamo che:

$$|\nabla F J_S|^2 = |J_S^T \nabla F^T|^2 = \frac{4}{(1+|x|^2)^2} |\nabla F|^2.$$

Poi, dopo aver osservato che $2h(F \circ S) \langle \nabla h, \nabla F J_S \rangle = \frac{1}{2} \langle \nabla h^2, \nabla (F \circ S)^2 \rangle$, integriamo per parti:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla h^2, \nabla (F \circ S)^2 \rangle dx &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (F \circ S)^2 \Delta h^2 dx \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} (F \circ S)^2 (|\nabla h|^2 + h \Delta h) dx. \end{aligned}$$

Allora unendo il tutto, usando la (1.8) e la (1.11) concludiamo:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(-F(S(x))^2 h(x) \Delta h(x) + \frac{4h(x)^2}{(1+|x|^2)^2} |\nabla F(S(x))|^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(F(S(x))^2 h^{2^*} \frac{n(n-2)}{4} + J_S(x) |\nabla F(S(x))|^2 \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(F(S(x))^2 \frac{n(n-2)}{4} + |\nabla F(S(x))|^2 \right) J_S(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{S}^n} |\nabla F(\xi)|^2 d\xi + \frac{n(n-2)}{4} \int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^2 d\xi. \quad \square \end{aligned}$$

Osservazione 3. La (1.1) diventa:

$$\left(\int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^{2^*} d\xi \right)^{\frac{1}{2^*}} \leq \sqrt{C_n \left(\int_{\mathbb{S}^n} |\nabla F(\xi)|^2 d\xi + \frac{n(n-2)}{4} \int_{\mathbb{S}^n} |F(\xi)|^2 d\xi \right)}. \quad (1.22)$$

Dimostrazione della disuguaglianza di Sobolev L^2 sharp.

Iniziamo osservando che il sollevamento sulla sfera di h è la funzione costante 1. Allora imponendo l'uguaglianza in (1.22) scopriamo che, una volta provata la disuguaglianza, $C_n = \frac{4}{n(n-2)} \left(\frac{1}{\alpha_n} \right)^{\frac{2}{n}}$ è la costante ottimale.

Ora, sia $f \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$ funzione con $\nabla f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, chiamo $a = \|f\|_{2^*}$, $b = \|h\|_{2^*}$ e considero $\hat{f} = \frac{b}{a}f$. Allora:

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} \|f\|_{2^*} &= \|\hat{f}\|_{2^*} = \|h\|_{2^*} = \sqrt{C_n} \|\nabla h\|_2 \leq \sqrt{C_n} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\nabla \hat{f}_k\|_2 \\ &\leq \sqrt{C_n} \|\nabla \hat{f}\|_2 = \frac{b}{a} \sqrt{C_n} \|\nabla f\|_2. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Dunque abbiamo provato la disuguaglianza e l'estremalità di h ci garantisce che C_n è la costante sharp cercata. Infine, le funzioni in (1.3) sono estremali in quanto, a meno di una costante, sono una traslazione e un riscalamento di h . Non dimostreremo che sono le sole funzioni estremali, si può però trovare una dimostrazione che usa la classificazione delle soluzioni dell'equazione di Yamabe in [5]. $\square$

Capitolo 2

La disuguaglianza di Sobolev logaritmica

Nella prima parte di questa sezione andremo ad introdurre la misura gaussiana su $\mathbb{R}^k$ e la definizione di entropia di una funzione, oggetti necessari per enunciare la disuguaglianza di Sobolev logaritmica. Nella seconda parte andremo a dimostrare la disuguaglianza, usando in modo cruciale la disuguaglianza di Sobolev sharp dimostrata nel precedente capitolo. In particolare, risulterà nuovamente essenziale la funzione estrema $h(x)$ già definita in (1.9) moltiplicata per una costante. Useremo cioè:

$$h(x) = \left(\frac{1}{1 + |x|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}.$$

2.1 Osservazioni preliminari

Definiamo su $\mathbb{R}^k$ la misura Gaussiana γ

$$d\gamma = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} dx, \quad x \in \mathbb{R}^k. \quad (2.1)$$

Sia inoltre $f \in C_0(\mathbb{R}^k)$, definiamo l'entropia di f come

$$\text{Ent}(f) = \int_{\mathbb{R}^k} f^2 \log|f| d\gamma - \log \left(\int_{\mathbb{R}^k} f^2 d\gamma \right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^k} f^2 d\gamma.$$

L'entropia rispetta le due seguenti proprietà:

1. $\text{Ent}(\lambda f) = \lambda^2 \text{Ent}(f)$,

2. $\text{Ent}(f) \geq 0$.

Lemma 2.1.1 (Approssimazione della misura Gaussiana). *Scomponiamo $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ con $z = (x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ e definiamo una successione di misure di probabilità $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ su $\mathbb{R}^k$ con:*

$$\mu_n(A) = \frac{1}{\beta_n} \int_{\frac{A}{\sqrt{n}} \times \mathbb{R}^{n-k}} \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} dz,$$

dove $A \subset \mathbb{R}^k$ è Lebesgue misurabile e $\beta_n = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |z|^2)^n} dz$ costante di normalizzazione. Vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) = \gamma(A), \quad \forall A \in \mathcal{L}^k, \quad (2.2)$$

dove con $\mathcal{L}^k$ indichiamo la σ -algebra degli insiemi misurabili secondo la misura di Lebesgue k -esima.

Dimostrazione. Consideriamo l'integrale

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{n}}} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1 + |x|^2 + |y|^2)^{-n} dy dx.$$

Tramite il cambio di variabili $y = \sqrt{1 + |x|^2} \hat{y}$ otteniamo la seguente fattorizzazione dell'integrale di sopra:

$$\int_{\frac{A}{\sqrt{n}}} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+k}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1 + |\hat{y}|^2)^{-n} d\hat{y}.$$

Inoltre, con il cambio di variabili $x = \frac{1}{\sqrt{n}} \hat{x}$ troviamo:

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &= \int_{\frac{A}{\sqrt{n}}} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+k}{2}} dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} (1 + |x|^2)^{-\frac{n+k}{2}} dx \\ &= \int_A \left(1 + \frac{|\hat{x}|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} d\hat{x} \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} \left(1 + \frac{|\hat{x}|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} d\hat{x}. \end{aligned}$$

A questo punto, grazie al Teorema di Beppo Levi possiamo portare il limite dentro l'integrale:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(A) &= \int_A \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} dx \\ &= \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}} \int_A e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx = \gamma(A). \end{aligned}$$

□

Osservazione 4 (Derivata di Radon-Nykodym di μ_n). La misura μ_n è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue k -esima e dunque possiamo calcolarne la derivata di Radon-Nykodym (che indicheremo con $\frac{d\mu_n}{dx}$):

$$\frac{d\mu_n}{dx}(x) = \lim_{B \rightarrow x} \frac{\mu_n(B)}{m(B)} = \lim_{B \rightarrow x} \frac{1}{m(B)} \int_B \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} dx \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} dx,$$

dove abbiamo indicato con $m(B)$ la misura di Lebesgue k -esima della palla $B \subset \mathbb{R}^k$ di centro x , usando l'espressione $B \rightarrow x$ per intendere che il raggio di B tende a zero. Usando allora il Teorema di differenziazione di Lebesgue otteniamo:

$$\frac{d\mu_n}{dx}(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} \Big/ \int_{\mathbb{R}^k} \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^{-\frac{n+k}{2}} dx. \quad (2.3)$$

Notiamo che la funzione in (2.3) presenta la stessa struttura delle funzioni di Talenti definite in (1.3).

Lemma 2.1.2. *Siano $m \in \mathbb{N}$ e $\beta \geq m$. Allora:*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{1 + |z|^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} dz = \prod_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + r^2}\right)^{\frac{\beta-i+1}{2}} dr \quad (2.4)$$

Dimostrazione. Usiamo l'induzione su m : per $m = 1$ è ovvio. Supponiamo che la tesi valga per m e dimostriamo che vale anche per $m + 1$.

Procediamo in modo analogo a quanto fatto per il Lemma 2.1.1:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \left(\frac{1}{1 + |z|^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} dz &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^m} (1 + x^2 + |y|^2)^{-\frac{\beta}{2}} dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + x^2}\right)^{\frac{\beta-m}{2}} dx \int_{\mathbb{R}^m} \left(\frac{1}{1 + |y|^2}\right)^{\frac{\beta}{2}} dy \\ &= \prod_{i=1}^{m+1} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{1 + r^2}\right)^{\frac{\beta-i+1}{2}} dr, \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo ri-usato il cambio di variabili $y = \sqrt{1 + x^2} \hat{y}$. $\square$

2.2 Dimostrazione della disuguaglianza di Sobolev logaritmica

Teorema 2.2.1. *Per ogni funzione $f \in C_0^1(\mathbb{R}^k)$ vale:*

$$Ent(f) \leq \int_{\mathbb{R}^k} |\nabla f|^2 d\gamma. \quad (2.5)$$

Dimostrazione. Sia $v \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, definiamo $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$ come

$$u = hv \quad (2.6)$$

con $h(z) = \left(\frac{1}{1+|z|^2} \right)^{\frac{n-2}{2}}$. Derivando la (2.6) segue immediatamente che:

$$|\nabla u|^2 = h^2 |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} \nabla v^2 \nabla h^2 + v^2 |\nabla h|^2, \quad (2.7)$$

e tramite un'integrazione per parti troviamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v^2 \nabla h^2 dz &= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} v^2 \Delta h^2 dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} v^2 (|\nabla h|^2 + h \Delta h) dz. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Allora usando la (2.7), la (2.8) e la (1.11) otteniamo:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dz = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla v|^2}{(1+|z|^2)^{n-2}} dz + n(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^2}{(1+|z|^2)^n} dz,$$

e usando la disuguaglianza di Sobolev (1.1) scopriamo che:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^{\frac{2n}{n-2}}}{(1+|z|^2)^n} dz \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq C_n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\nabla v|^2}{(1+|z|^2)^{n-2}} + n(n-2) \frac{v^2}{(1+|z|^2)^n} \right) dz. \quad (2.9)$$

Ricordando che h è una funzione estrema per la disuguaglianza di Sobolev, per $v = 1$ otteniamo un'uguaglianza in (2.9):

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|^2)^n} dz \right)^{\frac{n-2}{n}} = n(n-2) C_n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|z|^2)^n} dz,$$

che riscritta usando la definizione di β_n diventa:

$$\beta_n^{\frac{n-2}{n}} = n(n-2) C_n \beta_n. \quad (2.10)$$

Dividiamo ora termine a termine la (2.9) e la (2.10):

$$\left(\frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|v|^{\frac{2n}{n-2}}}{(1+|z|^2)^n} dz \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{1}{n(n-2)\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla v|^2}{(1+|z|^2)^{n-2}} dz + \frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^2}{(1+|z|^2)^n} dz \quad (2.11)$$

A questo punto consideriamo una funzione v specifica: poniamo $v(x, y) = f(\sqrt{n}x)$, la (2.11) diventa dunque:

$$\left(\frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\sqrt{n}x)|^{\frac{2n}{n-2}}}{(1+|z|^2)^n} dz \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq \frac{1}{(n-2)\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f(\sqrt{n}x)|^2}{(1+|z|^2)^{n-2}} dz + \frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\sqrt{n}x)^2}{(1+|z|^2)^n} dz.$$

Per semplicità introduciamo la seguente notazione:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(\sqrt{n}x)|^{\frac{2n}{n-2}}}{(1+|z|^2)^n} dz, \\ B_n &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\sqrt{n}x)^2}{(1+|z|^2)^n} dz, \\ D_n &= \frac{1}{\beta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f(\sqrt{n}x)|^2}{(1+|z|^2)^{n-2}} dz. \end{aligned}$$

Dunque la disuguaglianza diventa

$$E_n = (n-2)(A_n^{\frac{n-2}{n}} - B_n) \leq D_n. \quad (2.12)$$

Fattorizzando gli integrali come fatto nel Lemma 2.1.1 e usando la (2.3) otteniamo:

$$\begin{aligned} A_n &= \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_n, \\ B_n &= \int_{\mathbb{R}^k} |f(x)|^2 d\mu_n, \\ D_n &= \int_{\mathbb{R}^k} |\nabla f(x)|^2 \left(1 + \frac{|x|^2}{n}\right)^2 d\mu_n \frac{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1+|y|^2)^{2-n} dy}{\int_{\mathbb{R}^{n-k}} (1+|y|^2)^{-n} dy} = D_n^1 D_n^2. \end{aligned}$$

Inoltre, usando la (2.4) abbiamo:

$$D_n^2 = \frac{\prod_{i=1}^{n-k} \int_{\mathbb{R}} (1+r^2)^{\frac{i+3-2n}{2}} dr}{\prod_{i=1}^{n-k} \int_{\mathbb{R}} (1+r^2)^{\frac{i-1-2n}{2}} dr} = \frac{\prod_{i=1}^4 \int_{\mathbb{R}} (1+r^2)^{\frac{(i+3-2n)+(n-k-4)}{2}} dr}{\prod_{i=1}^4 \int_{\mathbb{R}} (1+r^2)^{\frac{i-1-2n}{2}} dr}. \quad (2.13)$$

Tramite il cambio di variabili $r \rightarrow \frac{r}{\sqrt{n}}$ e passando al limite per $n \rightarrow \infty$ la D_n^2 diventa:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n^2 = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr}{\int_{\mathbb{R}} e^{-r^2} dr} \right)^4 = 4,$$

e dunque sfruttando il Lemma 2.1.1 e ricordando che $f \in C_0^1(\mathbb{R}^k)$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D_n = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} D_n^1 = 4 \int_{\mathbb{R}^k} |\nabla f|^2 d\gamma. \quad (2.14)$$

Ricordiamo ora il seguente sviluppo di Taylor per $p \rightarrow p_0$:

$$a^p = a^{p_0} + a^{p_0} \log(a)(p - p_0) + (p - p_0)^2 \mathcal{O}(1),$$

dove $p_0 \geq 0, a \in]0, a_0]$ e $\mathcal{O}(1)$ è una quantità limitata. Scegliamo $a = |f(x)|, p_0 = 2$ e $p = \frac{2n}{n-2}$ e dunque per $n \rightarrow \infty$ abbiamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^k} \left(|f|^2 + \frac{4}{n-2} |f|^2 \log(|f|) + \frac{16}{(n-2)^2} \mathcal{O}(1) \right) d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^k} |f|^2 d\gamma$$

Usando lo stesso sviluppo di sopra con $p_0 = 1$ e $p = \frac{n-2}{n}$ troviamo:

$$A_n^{\frac{n-2}{n}} = A_n - \frac{2}{n}A_n \log(A_n) + \frac{4}{n^2}\mathcal{O}(1).$$

Dunque, riscriviamo $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n$ come segue:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} E_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(4 \int_{\mathbb{R}^k} f^2 \log(|f|) d\mu_n - 2 \frac{n-2}{n} \int_{\mathbb{R}^k} |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_n \log \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f|^{\frac{2n}{n-2}} d\mu_n \right) + \frac{\mathcal{O}(1)}{n} \right) \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^k} f^2 \log(|f|) d\gamma - 2 \int_{\mathbb{R}^k} |f| d\gamma \log \left(\int_{\mathbb{R}^k} |f|^2 d\gamma \right) = 4Ent(f) \end{aligned} \tag{2.15}$$

(2.16)

e unendo la (2.16) alla (2.14) arriviamo alla conclusione. $\square$

Bibliografia

- [1] Elliot H. Lieb e Michael Loss; *Analysis*, Second edition. Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [2] Laurent Saloff-Coste; *Aspects of Sobolev-Type Inequalities*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 289. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [3] Roberto Monti; *Disuguaglianze in analisi: appunti del Corso di Dottorato*, Manuscripta, 2007.
- [4] Walter Rudin; *Principles of Mathematical analysis*, third edition. International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw Hill, New York, 1976.
- [5] Wenxiong Chen e Congming Li; *Classification of solutions of some non-linear elliptic equations*, Duke Mathematical Journal, Vol. 63, 615-622, 1991.
- [6] Gerald B. Folland; *Real analysis: Modern Techniques and Their Applications*, Second edition, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1999.
- [7] B.A. Dubrovin, A.T.Fomenko, S.P.Novikov; *Modern Geometry-Methods and Applications* vol. 1, Springer-Verlag, Heidelberg, 1984.