UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

Università degli Studi di Padova

Dipartimento di Matematica "Tullio Levi-Civita"

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Stima del gradiente per soluzioni dell'equazione delle superfici minime

Relatore:
Prof. Roberto Monti

Laureando: Giacomo Spizzichino
Matricola: 2003224

Anno Accademico 2022/2023

21 luglio 2023

Indice

Introduzione

[1] Uno dei problemi classici e maggiormente studiati del calcolo delle variazioni è il problema di Plateau, che consiste nel trovare la superficie di area minima tra tutte quelle racchiuse da una curva data. La formulazione originaria del problema riguarda superfici nello spazio euclideo tridimensionale, ma chiaramente il problema può essere esteso ad ipersuperfici in uno spazio di dimensione arbitraria oppure a superfici di codimensione maggiore, per cui la questione si complica notevolmente.
Limitandosi allo studio delle ipersuperfici non parametriche, cioè definite globalmente come grafico di una funzione sufficientemente regolare $g\colon \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, si ha che l'area della superficie è data dal funzionale

$$A(g) = \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, dx\,,$$

e quindi minimizzare l'area equivale a trovare soluzioni dell'equazione di Eulero-Lagrange del funzionale A, detta equazione delle superfici minime:

$$\operatorname{div}\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}}\right) \equiv 0 \text{ in } \Omega\,. \tag{1}$$

In effetti, l'equazione corrisponde all'annullamento della curvatura media del grafico di g in ogni suo punto e perciò all'essere superficie minima nel senso della geometria differenziale, come verrà visto.

L'obiettivo di questo lavoro di tesi è provare la seguente stima a priori di E. Bombieri, E. De Giorgi e M. Miranda pubblicata in [2]:

Teorema 0.1 (Stima del gradiente per soluzioni dell'equazione delle superfici minime)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e $g \in C^2(\Omega)$ soluzione dell'equazione delle superfici minime. Allora, per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$|\nabla g(x)| \leq C_1 \exp\left(\frac{C_2}{d} \sup_{y \in \Omega} [g(y) - g(x)]\right), \tag{2}$$

con $d = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ e C_1 e C_2 costanti dipendenti solamente dalla dimensione n.

Il Teorema 0.1 ha permesso di raggiungere una serie di importanti risultati nella teoria delle ipersuperfici minime non parametriche. Ad esempio, combinando la stima con

[1] Parte nuova.

risultati di teoria delle equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche è possibile dimostrare l'esistenza di una soluzione regolare per il problema di Dirichlet per l'equazione delle superfici minime con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato di classe C^2, $\partial\Omega$ con curvatura media non negativa e condizione al bordo $\eta \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ continua (per approfondimenti si veda [7], Capitolo 13).
La stima (2) è stata di fondamentale importanza anche per la risoluzione del problema di Bernstein, che si propone di indagare la validità in dimensione maggiore del teorema dimostrato nel 1915 in [1] da N. S. Bernstein in dimensione 2: una soluzione dell'equazione (1) su tutto $\mathbb{R}^2$ è affine, di conseguenza ha necessariamente come grafico un piano. In questo contesto, la stima è stata utilizzata per ottenere per $n \leq 7$ la limitatezza del gradiente di una soluzione dell'equazione delle superfici minime su tutto lo spazio $\mathbb{R}^n$. La proprietà di limitatezza del gradiente, combinata con la disuguaglianza di Harnack per equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche, ha permesso a J. Simons (grazie anche ai lavori di W. H. Fleming, E. De Giorgi, F. Almgren) di estendere il teorema di Bernstein in dimensione $n \leq 7$. Questo risultato è il migliore possibile, poichè per $n = 8$ E. Bombieri, E. De Giorgi ed E. Giusti trovarono un esempio di grafico minimale che non è un iperpiano (si veda [7], Capitolo 17).

La dimostrazione originale del Teorema 0.1 di Bombieri, De Giorgi e Miranda utilizza la disuguaglianza isoperimetrica. Qualche anno dopo, nel 1972, N. S. Trudinger provò lo stesso risultato utilizzando tecniche di analisi reale e teoria della misura in [8]. La dimostrazione presentata in questa tesi riprende proprio questo lavoro di Trudinger, poi sviluppato in [5].

Il primo capitolo è dedicato alla geometria differenziale delle ipersuperfici in dimensione arbitraria, fino ad arrivare alla definizioni di curvatura media e superficie minima. In seguito, si passa a trattare il problema di minimizzazione dell'area e la relazione tra le superfici che lo risolvono e le superfici minime nel senso della geometria differenziale. Il secondo capitolo riguarda invece gli operatori differenziali tangenziali, che sulle superfici minime hanno interessanti proprietà, come ad esempio l'integrazione per parti. In particolare nell'ultima sezione del capitolo viene dimostrata la disuguaglianza del valor medio per funzioni subarmoniche non negative, punto di partenza per le considerazioni che verranno fatte nell'ultimo capitolo, in cui si combinano i risultati precedentemente ottenuti per arrivare alla stima del gradiente cercata.

Capitolo 1

Ipersuperfici minime in $\mathbb{R}^{n+1}$

1.1 Curvatura media e superfici minime

In questa sezione introduttiva ci occuperemo di illustrare alcune nozioni di geometria differenziale delle ipersuperfici in $\mathbb{R}^{n+1}$, in particolare l'espressione della loro curvatura media H.

Definizione 1.1 (Ipersuperficie di classe C^k)**.** Un insieme $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ si dice *ipersuperficie (differenziabile) di classe* C^k di $\mathbb{R}^{n+1}$, con $k \geq 1$, se per ogni $\bar{x} \in S$ esistono $\delta > 0$ e $f \in C^k(B_\delta(\bar{x}))$ tali che:
i) $B_\delta(\bar{x}) \cap S = \{x \in B_\delta(\bar{x}) \, : \, f(x) = 0\}$;
ii) $|\nabla f(x)| \neq 0$ per ogni $x \in B_\delta(\bar{x})$.
La funzione f si dice *funzione definiente* (locale) per S.

Osservazione 1.1. Per il teorema di Dini della funzione implicita le condizioni i) e ii) della Definizione 1.1 equivalgono al fatto che localmente S può essere descritta, a meno di una rotazione degli assi, come il grafico di una funzione di classe C^k.

Definizione 1.2 (Spazio tangente)**.** Siano S una ipersuperficie di classe C^k di $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in S$. Definiamo lo *spazio tangente* T_xS come l'insieme

$$T_xS = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \exists \, \gamma \colon (-\delta, \delta) \to S \text{ di classe } C^1 \text{ con } \gamma(0) = x, \, \gamma'(0) = v\} \, .$$

Osservazione 1.2. Siano S ipersuperficie, $x \in S$ ed f una funzione definiente per S in un intorno di x. Allora si ha

$$T_xS = \ker df(x) = \{v \in \mathbb{R}^{n+1} : \langle \nabla f(x), v \rangle = 0\} \, ,$$

dove $df(x) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{n+1}; \mathbb{R})$ è il differenziale di f in x e $\langle , \rangle \colon \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ indica il prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^{n+1}$. In particolare T_xS è uno spazio vettoriale di dimensione n. Il vettore $\nabla f(x) \neq 0$ è ortogonale a T_xS: possiamo quindi definire (localmente e a meno del segno) il *campo normale unitario* a S

$$\nu(x) = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} \, . \tag{1.1}$$

Una ipersuperficie $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ su cui è possibile definire un campo normale continuo globale si dice *orientabile*.

D'ora in poi, in questa sezione considereremo sempre S ipersuperficie di classe C^2, $x \in S$ e ν la normale a S in x, definita localmente come nell'Osservazione 1.2.

Definizione 1.3 (Prima forma fondamentale)**.** Definiamo la *prima forma fondamentale* I_x di S in x come la forma bilineare simmetrica indotta canonicamente dal prodotto scalare standard sullo spazio tangente T_xS, cioè

$$\mathrm{I}_x\colon T_xS \times T_xS \to \mathbb{R}\,, \quad (v,w) \mapsto \langle v, w\rangle\,.$$

Definizione 1.4 (Operatore forma o di Weingarten)**.** L'*operatore forma o di Weingarten* L_x di S in x è l'applicazione lineare

$$L_x\colon T_xS \to T_xS, \quad w \mapsto -\frac{\partial \nu}{\partial w}(x)\,,$$

dove $\frac{\partial}{\partial w}$ indica la derivata direzionale rispetto a w.

Osservazione 1.3. L'operatore forma è definito a meno della scelta di $\pm\nu$. Inoltre è definito *globalmente* su S solo se S è orientabile.

Proposizione 1.1. Per ogni $x \in S$ l'operatore forma L_x è autoaggiunto rispetto alla prima forma fondamentale, cioè per ogni v, $w \in T_xS$

$$\mathrm{I}_x(L_x(v), w) = \mathrm{I}_x(v, L_x(w))\,.$$

Dimostrazione. Possiamo supporre che in un intorno di x, a meno di una rotazione degli assi, esista una funzione $g \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, tale che $S = \mathrm{gr}(g) = \{(y, g(y)) : y \in \Omega\}$ (vedi Osservazione 1.1). Una funzione definiente per S è $f(y, y_{n+1}) = y_{n+1} - g(y)$. In $x = (y_0, g(y_0))$ si ha

$$\nabla f(x) = (-\nabla g(y_0), 1)\,, \quad y_0 \in \Omega\,.$$

Indicheremo con $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^{n+1}$. I vettori

$$w_i = e_i + \frac{\partial g}{\partial y_i}(y_0)\, e_{n+1}\,, \quad i = 1, \dots, n$$

sono linearmente indipendenti e verificano $\langle \nabla f(x), w_i\rangle = 0$. Sono quindi una base di T_xS. È sufficiente quindi dimostrare l'identità $\mathrm{I}_x(L_x(w_i), w_j) = \mathrm{I}_x(w_i, L_x(w_j))$ per ogni $i, j = 1, \dots, n$. Si ha

$$0 = \frac{\partial}{\partial w_i}\langle \nu, w_j\rangle = \Big\langle \frac{\partial \nu}{\partial w_i}, w_j\Big\rangle + \Big\langle \nu, \frac{\partial w_j}{\partial w_i}\Big\rangle = -\mathrm{I}_x(L_x(w_i), w_j) + \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(y_0)\Big\rangle$$

e poichè g è di classe C^2 per il teorema di Schwarz si conclude

$$\mathrm{I}_x(L_x(w_i), w_j) = \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}(y_0)\Big\rangle = \Big\langle \nu, \frac{\partial^2 g}{\partial x_j \partial x_i}(y_0)\Big\rangle = \mathrm{I}_x(L_x(w_j), w_i)\,, \quad i, j = 1, \dots, n\,.$$

$\square$

Definizione 1.5 (Seconda forma fondamentale)**.** Definiamo la *seconda forma fondamentale* II_x di S in x come la forma bilineare

$$\mathrm{II}_x\colon T_xS \times T_xS \to \mathbb{R}, \quad (v,w) \mapsto \mathrm{I}_x(L_x(v),w)\,.$$

Osservazione 1.4. Per le proprietà di autoaggiunzione rispetto alla prima forma fondamentale di L_x (vedi Proposizione 1.1), II_x è una forma bilineare simmetrica. Di conseguenza esiste una base ortonormale $\mathfrak{B} = \{b_1,\dots,b_n\}$ di T_xS tale che per ogni $i = 1,\dots,n$ esiste $k_i \in \mathbb{R}$ con $\mathrm{II}_x(b_i,b_j) = k_i\,\delta_{ij}\,,\ j = 1,\dots,n$.
I k_i sono gli autovalori dell'operatore forma di S in x, detti *curvature principali*, mentre i vettori b_i sono detti *direzioni principali*.

Definizione 1.6 (Curvatura media)**.** La *curvatura media* H di S in un punto x è la media aritmetica delle curvature principali k_i di S in x:

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i(x)\ .$$

Osservazione 1.5. Il campo normale ν può essere esteso fuori da S definendolo come nella (1.1), ottenendo un campo vettoriale di classe C^1.

Proposizione 1.2. Si ha

$$H(x) = -\frac{1}{n}\,\mathrm{div}(\nu(x)), \qquad x \in S\,, \tag{1.2}$$

dove con $\mathrm{div}(\nu)$ indichiamo la divergenza in $\mathbb{R}^{n+1}$ del campo vettoriale ν.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{B}$ base di T_xS come nell'Osservazione 1.4. Supponiamo che $b_i = \sum_{j=i}^{n+1}\alpha_{ij}\,e_j$, per certi $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$. Nella base $\mathfrak{B}$ abbiamo

$$k_i = \mathrm{II}(b_i,b_i) = \big\langle -\frac{\partial\nu}{\partial b_i}, b_i\big\rangle = \sum_{j,k=1}^{n+1}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\,\big\langle -\frac{\partial\nu}{\partial x_j}, e_k\big\rangle = -\sum_{j,k=1}^{n+1}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\,\frac{\partial\nu_k}{\partial x_j}.$$

Dalle proprietà di ortonormalità della base $\mathfrak{B}$ si ha $\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_{ij}\alpha_{ik} = \delta_{jk}$, da cui

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j,k=1}^{n+1}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\,\frac{\partial\nu_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{ik}\,\frac{\partial\nu_k}{\partial x_j} = \\ &= -\frac{1}{n}\sum_{j,k=1}^{n+1}\delta_{jk}\frac{\partial\nu_k}{\partial x_j} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial\nu_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{n}\,\mathrm{div}(\nu(x))\,. \end{aligned}$$

□

Definizione 1.7 (Superficie minima)**.** Un'ipersuperficie orientabile S si dice *superficie minima* se ha curvatura media identicamente nulla, cioè $H \equiv 0$ su S.

Consideriamo ora il caso particolare in cui S sia il grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Con la scelta della normale che punta verso l'alto avremo

$$S = \{(x, x_{n+1}) \in \Omega \times \mathbb{R} : x_{n+1} = g(x)\} = \mathrm{gr}(g)\,, \quad \nu(y) = \frac{(-\nabla g(x), 1)}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}}\,, \tag{1.3}$$

con $y = (x, g(x)) \in S$. Da (1.2) si ottiene la seguente espressione della curvatura media H di un'ipersuperficie S data in forma di grafico in un suo punto y (scriveremo $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$):

$$H(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\frac{\partial_i g(x)}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}} \right).$$

Dunque, il grafico di g è una superficie minima se e solo se g soddisfa l'equazione differenziale alle derivate parziali

$$\mathrm{div} \left(\frac{\nabla g(x)}{\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2}} \right) \equiv 0\,, \; x \in \Omega\,. \tag{1.4}$$

L'equazione (1.4) è detta *equazione delle superfici minime.*

1.2 Superfici minime e minimizzazione dell'area

Ora ci occuperemo di analizzare il legame tra le superfici minime nel senso della geometria differenziale, cioè le ipersuperfici con curvatura media identicamente nulla, e le superfici di area minima, che risolvono un problema tipico del calcolo delle variazioni.

Definizione 1.8 (Funzionale dell'area)**.** Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato, $g \in C^1(\Omega)$ e lipschitziana. Il *funzionale dell'area* per il grafico di g è definito da:

$$A(g) = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla g|^2}\, dx,$$

dove dx indica l'elemento di integrazione della misura di Lebesgue n-dimensionale.

Definizione 1.9 (Misure di Hausdorff in $\mathbb{R}^{n+1}$)**.** Per $s \geq 0$ e $\delta > 0$, sia $\mathscr{H}^s_\delta \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \to [0, \infty]$ la funzione

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) = \inf \left\{ \omega_s \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{\mathrm{diam}(E_k)}{2} \right)^s : E_k \subseteq \mathbb{R}^{n+1},\ \mathrm{diam}(E_k) \leq \delta,\ A \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} E_k \right\},$$

e definiamo la *misura di Hausdorff s-dimensionale* in $\mathbb{R}^{n+1}$ $\mathscr{H}^s \colon \mathscr{P}(\mathbb{R}^{n+1}) \to [0, +\infty]$ come

$$\mathscr{H}^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(A)\,, \qquad A \in \mathscr{P}(\mathbb{R}^{n+1})\,.$$

Osservazione 1.6. $\mathscr{H}^s$ è una misura esterna, che perciò possiede la sua σ-algebra degli insiemi misurabili (teorema di Carathéodory). In effetti, i boreliani sono $\mathscr{H}^s$-misurabili, perciò $\mathscr{H}^s$ è una misura di Borel.

Il seguente teorema ci sarà utile per studiare le funzioni sufficientemente regolari il cui grafico minimizza l'area:

Teorema 1.1 (Formula dell'area)**.** Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $g \in C^1(\Omega)$ e $S = \mathrm{gr}(g)$. Allora se f è una funzione integrabile su S rispetto alla misura di Hausdorff $\mathscr{H}^n$ vale

$$\int_S f \, d\mathscr{H}^n = \int_\Omega f \, \sqrt{1 + |\nabla g|^2} \, dx \, . \tag{1.5}$$

In particolare, per $f \equiv 1$ e Ω limitato si ottiene

$$A(g) = \mathscr{H}^n(S) \, .$$

Dimostrazione. Omessa, si veda [3]. □

Supponiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto limitato con bordo sufficientemente regolare (C^1 a tratti). Il problema variazionale di minimizzazione dell'area è volto alla ricerca di funzioni $g \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})$ (e quindi differenziabili quasi ovunque) il cui grafico abbia la proprietà di minimizzare l'area tra tutti i grafici di funzioni ottenute tramite variazioni compatte, quindi con un vincolo sul comportamento al bordo $\partial\Omega$ dato da una funzione $\eta \colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ fissata. Stiamo cioè cercando di risolvere il problema di minimo

$$\min\{A(g) = \mathscr{H}^n(\mathrm{gr}(g)) : g \equiv \eta \text{ su } \partial\Omega \, , \; g \in \mathrm{Lip}(\overline{\Omega})\} \, . \tag{1.6}$$

Osservazione 1.7. Questo problema in generale non ha soluzione. Poichè la funzione $x \mapsto \sqrt{1 + |x|^2}$ è convessa in $\mathbb{R}^n$, l'esistenza della soluzione è garantita se la coppia (Ω, η) soddisfa una condizione di pendenza limitata (*Bounded Slope Condition*, B.S.C.). In particolare il problema ha soluzione per ogni $\eta \in C^2(\partial\Omega)$ e Ω convesso, si veda [6].

Supponiamo ora che $g \in C^2(\overline{\Omega})$ sia una soluzione del problema di minimo in (1.6). Quindi per ogni $\phi \in C^\infty_c(\Omega)$

$$A(g + t\,\phi) \geq A(g) \, , \quad t \in \mathbb{R} \, ,$$

e in particolare, se la derivata esiste, si ha $\frac{d}{dt} A(g + t\,\phi) \Big|_{t=0} = 0$. Fissiamo ora $\varepsilon > 0$. Grazie alla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, alla limitatezza di Ω e alla regolarità di ϕ e g, per ogni $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ si ha

$$\left| \frac{d}{dt} (\sqrt{1 + |\nabla(g + t\phi)|^2}) \right| = \left| \frac{\langle \nabla(g + t\phi), \nabla\phi \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla(g + t\phi)|^2}} \right| \leq |\nabla\phi| \, (|\nabla g| + \varepsilon|\nabla\phi|) \in L^\infty(\Omega) \subseteq L^1(\Omega).$$

Quindi, grazie al teorema di derivabilità degli integrali dipendenti da parametro, conseguenza del teorema di Lebesgue della convergenza dominata (si veda [4], Teorema 2.27), la funzione $t \mapsto A(g + t\,\phi)$ è derivabile in $t = 0$ e si ha

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dt} A(g + t\,\phi) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt} \int_\Omega \sqrt{1 + |\nabla(g + t\,\phi)|^2} \, dx \Big|_{t=0} = \\ &= \int_\Omega \frac{d}{dt} (\sqrt{1 + |\nabla(g + t\,\phi)|^2}) \Big|_{t=0} dx = \int_\Omega \frac{\langle \nabla g, \nabla\phi \rangle}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} \, dx \, . \end{aligned}$$

Integrando per parti e grazie al teorema della divergenza, si ottiene poi

$$\begin{aligned}0 &= \int_\Omega \left[\operatorname{div}\left(\phi\, \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right) - \phi\, \operatorname{div}\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right)\right] dx = \\ &= -\int_\Omega \phi\, \operatorname{div}\left(\frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right) dx\end{aligned}$$

per ogni $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Di conseguenza g deve soddisfare l'equazione (1.4).

In conclusione, ogni ipersuperficie in $\mathbb{R}^{n+1}$ in forma di grafico che minimizza l'area è una superficie minima nel senso della geometria differenziale.

Proposizione 1.3 (Calibrazione)**.** Sia $S \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$ che risolve l'equazione delle superfici minime (1.4) in Ω. Allora, data $f \in C_c^2(\Omega)$ e detta $S_f = \operatorname{gr}(f+g)$, si ha

$$\mathscr{H}^n(S) \le \mathscr{H}^n(S_f)\,.$$

Dimostrazione. Definiamo il campo vettoriale

$$D(x,y) = \frac{(-\nabla g(x), 1)}{\sqrt{1+|\nabla g(x)|^2}}, \qquad (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}\,.$$

Osserviamo che, poiché g è soluzione della (1.4), si ha $\operatorname{div}(D) \equiv 0$, inoltre $|D| \equiv 1$ e $D = \nu_S$ su S. Consideriamo i due seguenti insiemi aperti limitati di $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}B_+ &= \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} : f(x) > 0,\ g(x) < y < g(x) + f(x)\} \text{ e} \\ B_- &= \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} : f(x) < 0,\ g(x) + f(x) < y < g(x)\}\,.\end{aligned}$$

Applichiamo il teorema della divergenza a B_+ e otteniamo (con n_+ indichiamo la normale uscente a ∂B_+ e con $\{f > 0\} = \{(x,y) \in \Omega \times \mathbb{R} : f(x) > 0\}$)

$$\begin{aligned}0 &= \int_{B_+} \operatorname{div}(D)\, d\mathscr{L}^{n+1} = \int_{\partial B_+} \langle D, n_+\rangle\, d\mathscr{H}^n = \\ &= \int_{S\cap\{f>0\}} \langle D, -\nu_S\rangle\, d\mathscr{H}^n + \int_{S_f\cap\{f<0\}} \langle D, \nu_{S_f}\rangle\, d\mathscr{H}^n \le \\ &\le -\mathscr{H}^n(S\cap\{f>0\}) + \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f>0\})\,,\end{aligned}$$

quindi

$$\mathscr{H}^n(S\cap\{f>0\}) \le \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f>0\})\,.$$

Con un ragionamento analogo per B_- otteniamo

$$\mathscr{H}^n(S\cap\{f<0\}) \le \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f<0\})\,.$$

Notando poi che $S\cap\{f=0\} = S_f\cap\{f=0\}$ concludiamo

$$\begin{aligned}\mathscr{H}^n(S) &= \mathscr{H}^n(S\cap\{f<0\}) + \mathscr{H}^n(S\cap\{f=0\}) + \mathscr{H}^n(S\cap\{f>0\}) \le \\ &\le \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f<0\}) + \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f=0\}) + \mathscr{H}^n(S_f\cap\{f>0\}) = \\ &= \mathscr{H}^n(S_f)\,.\end{aligned}$$

□

Con la Proposizione 1.3 abbiamo ottenuto che una superficie minima globalmente definita coma grafico è anche una superficie che minimizza l'area. Nel caso di ipersuperficie di tipo grafico (di funzione sufficientemente regolare), dunque, la definizione data dalla geometria differenziale e la risoluzione del problema di area minima si equivalgono: un grafico di funzione è superficie minima se e solo se minimizza l'area.

Osservazione 1.8. L'equivalenza non vale per un'ipersuperficie generica. Infatti, la classe delle ipersuperfici di tipo grafico ha la proprietà di dare luogo ad un funzionale dell'area $g \mapsto A(g)$ strettamente convesso, da cui l'equivalenza tra l'essere punto stazionario per il funzionale dell'area (e quindi essere superficie minima nel senso della geometria differenziale, per quanto visto) e l'essere soluzione del problema di minimo introdotto in questa sezione. In più, dalla stretta convessità del funzionale si deduce anche l'unicità della soluzione, nei casi in cui essa esiste.
In generale il funzionale dell'area definito a partire da una parametrizzazione regolare e iniettiva dell'ipersuperficie perde la proprietà di convessità: perciò per un suo punto stazionario non è più garantita la minimalità.

Osservazione 1.9. [1] In effetti, la tesi della Proposizione 1.3 è semplicemente una conseguenza della convessità del funzionale A. Tuttavia, l'argomento presentato nella dimostrazione permette di confrontare l'area dell'ipersuperficie $\mathrm{gr}(g)$ con quella di alcune ipersuperfici parametriche che rispettano il vincolo sul comportamento al bordo $\partial\Omega$. Infatti, utilizzando il campo di calibrazione è possibile dimostrare che il grafico di g minimizza l'area tra tutte le ipersuperfici differenziabili $\Sigma \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ di classe C^2 ottenute per variazioni compatte da $\mathrm{gr}(g)$. Per le ipersuperfici non contenute nel "cilindro" $\Omega \times \mathbb{R}$ l'argomento non permette di concludere nulla, in quanto il campo di calibrazione non è definito al di fuori di tale insieme.

[1] Parte nuova.

Capitolo 2

Operatori differenziali tangenziali

2.1 Definizioni e prime proprietà

Siano $\mathscr{U} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ aperto, $S \subseteq \mathscr{U}$ una ipersuperficie differenziabile di classe C^2 in $\mathbb{R}^{n+1}$, $x \in S$. Indicheremo con $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{n+1})$ la normale unitaria ad S, con la scelta di orientazione.

Definizione 2.1 (Gradiente tangenziale)**.** Per ogni funzione $f \in C^1(\mathscr{U})$ definiamo il suo *gradiente tangenziale* $\delta f(x)$ come la proiezione sullo spazio tangente a S in x del gradiente di f, cioè:

$$\delta f(x) = \nabla f(x) - \langle \nu(x), \nabla f(x) \rangle \, \nu(x) \,,$$

e definiamo anche i singoli operatori di derivata direzionale tangenziale:

$$\delta_i f(x) = \partial_i f(x) - \langle \nu(x), \nabla f(x) \rangle \, \nu_i(x) \,, \quad i = 1, \ldots, n+1 \,.$$

Osservazione 2.1. Il gradiente tangenziale di f su S dipende solamente dai valori che la funzione f assume su S: infatti se $f = g$ su S si ha che il vettore $\nabla(f-g)$ è parallelo a ν e dunque $\delta(f-g) = 0$. Elenchiamo qui di seguito alcune proprietà derivanti dalla definizione di δ:

$$\langle \nu, \, \delta f \rangle = 0 \tag{2.1a}$$

$$|\delta f|^2 = |\nabla f|^2 - |\langle \nu, \nabla f \rangle|^2, \text{ da cui:} \tag{2.1b}$$

$$|\delta f| \leq |\nabla f| \,. \tag{2.1c}$$

Si ha anche

$$|\nu_{n+1}| \, |\nabla f| \leq |\delta f| \quad \text{ se } \partial_{n+1} f = 0 \,. \tag{2.2}$$

Infatti, applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la (2.1b) e poichè $|\nu| = 1$

$$|\delta f|^2 = |\nabla f|^2 - \Big(\sum_{i=1}^{n} \nu_i \, \partial_i f \Big)^2 \geq |\nabla f|^2 \Big(1 - \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 \Big) = \nu_{n+1}^2 \, |\nabla f|^2 \,.$$

Ci concentreremo d'ora in poi sul caso particolare in cui S sia una superficie definita globalmente come grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$. Con la definizione di normale come nella (1.3) si ha $\partial_{n+1}\nu_{n+1} = 0$. Quindi, grazie alla Proposizione 1.2 otteniamo

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \nu_i = \sum_{i=1}^{n} \partial_i \left(\frac{-\partial_i g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}} \right) - \sum_{i=1}^{n+1} \langle \nabla \nu_i, \nu \rangle \, \nu_i =$$
$$= -n\,H - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1} \partial_i(|\nu|^2)\,\nu_i = -n\,H.$$

Si arriva dunque all'espressione della curvatura media di S:

$$H = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \nu_i. \tag{2.3}$$

Il lemma seguente dà una formula di integrazione per parti per l'operatore δ su un'ipersuperficie minima di questo tipo.

Lemma 2.1 (Integrazione per parti di δ)**.** Sia S superficie minima, grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$. Allora per ogni $f \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})$

$$\int_S \delta f \; d\mathscr{H}^n = 0 \tag{2.4}$$

dove $d\mathscr{H}^n$ indica l'elemento di integrazione della misura di Hausdorff n-dimensionale.

Dimostrazione. Ricordiamo che nelle ipotesi del lemma abbiamo

$$\nu = \frac{(-\nabla g, 1)}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\,.$$

Definiamo $\tilde{f} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ come $\tilde{f}(x,y) = f(x, g(x))$. Chiaramente $f = \tilde{f}$ su S, perciò $\delta f = \delta \tilde{f}$. Sia poi $v = \sqrt{1+|\nabla g|^2}$, in modo che $d\mathscr{H}^n = v dx$ (si veda il Teorema 1.1). Allora per $i \le n$, integrando per parti si ha

$$\int_S \delta_i f \, d\mathscr{H}^n = \int_S \delta_i \tilde{f} \, d\mathscr{H}^n = \int_\Omega (\partial_i \tilde{f} - \langle \nu, \nabla \tilde{f} \rangle \, \nu_i) \, v dx =$$
$$= \int_\Omega [-\tilde{f}\,\partial_i v + \partial_i(\tilde{f}\,v) - \langle \nu, \nabla \tilde{f}\rangle \,\nu_i\, v]\, dx =$$
$$= \int_\Omega [-\tilde{f}\,\partial_i v - \operatorname{div}(\tilde{f}\nu_i v\,\nu) + \tilde{f}\operatorname{div}(\nu_i v\,\nu)]\, dx =$$
$$= \int_\Omega \tilde{f}\;[-\partial_i v + \langle \nu, \nabla(\nu_i v)\rangle + \nu_i v \operatorname{div}(\nu)]\, dx.$$

S è superficie minima, perciò da (1.2) otteniamo $\operatorname{div}(\nu) = -nH \equiv 0$ su Ω, e quindi

$$\int_S \delta_i f \, d\mathscr{H}^n = -\int_\Omega \tilde{f}\;[\partial_i v - \langle \nu, \nabla(\nu_i v)\rangle]\, dx =$$
$$= -\int_\Omega \tilde{f}\;\left[\frac{\langle \nabla g, \nabla(\partial_i g)\rangle}{v} - \left\langle \frac{\nabla g}{v}, \nabla(\partial_i g) \right\rangle \right] dx = 0.$$

Per $i = n+1$, poichè $\partial_{n+1}\tilde{f} = 0$ si ha

$$\int_S \delta_{n+1} f \, d\mathscr{H}^n = \int_S \delta_{n+1}\tilde{f} \, d\mathscr{H}^n = -\int_\Omega \langle \nu, \nabla \tilde{f}\rangle \nu_{n+1}\, v dx =$$
$$= -\int_\Omega \langle \nu, \nabla \tilde{f}\rangle \, dx = \int_\Omega [\tilde{f}\,\mathrm{div}(\nu) - \mathrm{div}(\tilde{f}\nu)]\, dx = 0.$$

□

Osservazione 2.2. Il Lemma 2.1 si può generalizzare ad una qualsiasi ipersuperficie minima di classe C^2 utilizzando una partizione dell'unità.

Definizione 2.2 (Operatore di Laplace-Beltrami)**.** Definiamo l'operatore di Laplace-Beltrami δ^2 sullo spazio delle funzioni di classe C^2: data $f \in C^2(\mathscr{U})$

$$\delta^2 f = \sum_{i=1}^{n+1} \delta_i(\delta_i f)\,.$$

Osservazione 2.3. Consideriamo $\varphi \in C^2_c(\Omega \times \mathbb{R})$. Allora, applicando il Lemma 2.1 a $\varphi\,\delta_i f \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})$, si ottiene dalla (2.4)

$$\int_S \varphi\, \delta^2 f \, d\mathscr{H}^n = \sum_{i=1}^{n+1} \int_S \varphi\, \delta_i(\delta_i f)\, d\mathscr{H}^n =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1} \int_S [\delta_i(\varphi\,\delta_i f) - \delta_i\varphi\,\delta_i f]\, d\mathscr{H}^n =$$
$$= -\int_S \langle \delta\varphi, \delta f\rangle \, d\mathscr{H}^n.$$

Inoltre, poichè $\varphi \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$ ed è a supporto compatto, anche $\delta_i\varphi$ è a supporto compatto e quindi $\delta_i\varphi \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})$. Il Lemma 2.1 applicato a $f\,\delta_i\varphi$ dà

$$-\int_S \langle \delta\varphi, \delta f\rangle \, d\mathscr{H}^n = -\sum_{i=1}^{n+1} \int_S [\delta_i(f\,\delta_i\varphi) - \delta_i(\delta_i\varphi)\, f]\, d\mathscr{H}^n = \int_S \delta^2\varphi\, f \, d\mathscr{H}^n.$$

Siamo giunti quindi alla seguente conclusione

$$\int_S \varphi\, \delta^2 f \, d\mathscr{H}^n = -\int_S \langle \delta\varphi, \delta f\rangle \, d\mathscr{H}^n = \int_S \delta^2\varphi\, f \, d\mathscr{H}^n, \tag{2.5}$$

per ogni $\varphi \in C^2_c(\Omega \times \mathbb{R})$.

2.2 Disuguaglianza del valor medio per funzioni subarmoniche

In questa sezione deriveremo delle importanti disuguaglianze riguardanti gli operatori δ e δ^2 su S, superficie minima e grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$, con l'obiettivo di dimostrare la disuguaglianza del valor medio per funzioni subarmoniche su S.

Siano $y=(x_0,\, g(x_0))\in S\,,\ r=|x-y|$ e $\psi\in C^2(\mathbb{R})$. Si ha

$$\begin{aligned}\delta_i\psi(r)&=\partial_i\psi(r)-\langle\nu,\nabla\psi(r)\rangle\,\nu_i=\psi'(r)\,\frac{x_i-y_i}{r}-\frac{\psi'(r)}{r}\,\langle\nu\,,\,x-y\rangle\,\nu_i=\\&=\frac{\psi'(r)}{r}\,[x_i-y_i-\langle\nu,x-y\rangle\,\nu_i]\,.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Poi, usando la (2.5) e la (2.1a)

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}\delta_i(x_j-y_j)=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i(x_i-y_i)=\sum_{i=1}^{n+1}(1-\langle e_i,\nu\rangle\,\nu_i)=\sum_{i=1}^{n+1}(1-\nu_i^2)=n\,,\tag{2.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n+1}\delta_i(\nu_i\nu_j)=\sum_{i,j=1}^{n+1}[\nu_j\delta_i\nu_i+\nu_i\delta_i\nu_j]=\sum_{j=1}^{n+1}(-nH\nu_j+\langle\nu,\delta\nu_j\rangle)=0\,,\tag{2.8}$$

$$\delta_i\Big(\frac{\psi'(r)}{r}\Big)=\frac{x_i-y_i}{r^2}\Big[\psi''(r)-\frac{\psi'(r)}{r}\Big]-\Big[\psi''(r)-\frac{\psi'(r)}{r}\Big]\langle\nu,\frac{x-y}{r^2}\rangle\nu_i\,.\tag{2.9}$$

Dalla (2.1b) si ottiene inoltre

$$|\delta r|^2=|\nabla r|^2-|\langle\nu,\nabla r\rangle|^2=1-\frac{\langle\nu,x-y\rangle^2}{r^2}$$

e quindi combinando la (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) si arriva a

$$\begin{aligned}\delta^2\psi(r)=&\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i\delta_i\psi(r)=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i\Big[\frac{\psi'(r)}{r}\,(x_i-y_i-\langle\nu,x-y\rangle\,\nu_i)\Big]=\\=&\Big(\psi''(r)-\frac{\psi'(r)}{r}\Big)\sum_{i=1}^{n+1}\Big(\frac{x_i-y_i-\langle\nu,x-y\rangle\,\nu_i}{r}\Big)^2+\\&+\frac{\psi'(r)}{r}\sum_{i,j=0}^{n+1}\delta_i[x_i-y_i-\nu_j(x_j-y_j)\nu_i]=\\=&\Big(\psi''(r)-\frac{\psi'(r)}{r}\Big)|\delta r|^2+\frac{n\psi'(r)}{r}\,.\end{aligned}\tag{2.10}$$

In particolare, sia $h\in C^1(\mathbb{R})$ una funzione non negativa e non crescente con $\mathrm{supp}(h)\subseteq(-\infty,1)$ e sia

$$\psi(r)=\int_r^\infty\tau h(\tau/\rho)\,d\tau\,,\tag{2.11}$$

con $0<\rho<R$ ed R tale che $B_R(y)=\{x\in\mathbb{R}^{n+1}:|x-y|<R\}\subseteq\Omega\times\mathbb{R}$. Notiamo che $\mathrm{supp}(\psi)\subseteq[0,\rho)$, ed è quindi compatto. Applicando la (2.10) alla funzione ψ si ottiene

$$\begin{aligned}\delta^2\psi(r)&=\Big(-h(r/\rho)-\frac{r\,h'(r/\rho)}{\rho}+h(r/\rho)\Big)|\delta r|^2-n\,h(r/\rho)=\\&=\rho^{n+1}\,\frac{\partial}{\partial\rho}\,[\rho^{-n}h(r/\rho)]+r\,h'(r/\rho)\,\frac{1-|\delta r|^2}{\rho}\,,\end{aligned}$$

e poichè $h'(r/\rho) \leq 0$ si ha la disuguaglianza

$$\delta^2\psi(r) \leq \rho^{n+1} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{-n} h(r/\rho)\right] . \tag{2.12}$$

Queste considerazioni preliminari saranno utili per dimostrare la disuguaglianza del valor medio cercata.

Definizione 2.3. Una funzione $f \in C^2(\Omega \times \mathbb{R})$ è detta *subarmonica* su un'ipersuperficie S se $\delta^2 f \geq 0$ su S.

Teorema 2.1 (Disuguaglianza del valor medio per funzioni subarmoniche non negative)**.** Sia S una ipersuperficie minima di classe C^2 e sia $f \in C^2(\Omega\times\mathbb{R})$ una funzione subarmonica su S e non negativa. Allora per ogni $y \in S$ e per ogni $R > 0$ tale che $B_R(y) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$ vale

$$f(y) \leq \frac{1}{\omega_n R^n} \int_{S \cap B_R(y)} f \, d\mathscr{H}^n . \tag{2.13}$$

Dimostrazione. Fissiamo $y \in S$ e $R > 0$ tale che $B_R(y) \subseteq \Omega \times \mathbb{R}$. Possiamo supporre $f \in L^1(S \cap B_R(y))$, altrimenti la disuguaglianza è banalmente verificata. Sia ψ definita come nella (2.11), in particolare $\psi \in C^2_c(\Omega \times \mathbb{R})$, $\psi \geq 0$. Combinando la (2.5) e la (2.12), otteniamo

$$\rho^{n+1} \int_S f \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{-n} h(r/\rho)\right] d\mathscr{H}^n \geq \int_S f \,\delta^2\psi \, d\mathscr{H}^n = \int_S \psi \,\delta^2 f \, d\mathscr{H}^n \geq 0 .$$

Ricordando che $h \in C^1(\mathbb{R})$ e $\mathrm{supp}(h) \subseteq (-\infty, 1)$, si ha

$$\begin{aligned}\rho^{n+1} \int_S f \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{-n} h(r/\rho)\right] d\mathscr{H}^n &= \int_{S \cap B_R(y)} \rho^{n+1} f \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{-n} h(r/\rho)\right] d\mathscr{H}^n = \\ = -\int_{S \cap B_R(y)} \rho^{n+1} f \, \frac{n\rho\, h(r/\rho) + r\, h'(r/\rho)}{\rho^{n+2}} \, \chi_{(-\infty,1)}(r/\rho) \, d\mathscr{H}^n ,\end{aligned}$$

dove $\chi_{(-\infty,1)}$ indica la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, 1)$. In più

$$\begin{aligned}\left|\rho^{n+1} f \, \frac{n\rho\, h(r/\rho) + r\, h'(r/\rho)}{\rho^{n+2}} \chi_{(-\infty,1)}(r/\rho)\right| &\leq \left|\rho^{-1} f \left[n\rho\, h(r/\rho) + \rho\, h'(r/\rho)\right] \chi_{(-\infty,1)}(r/\rho)\right| = \\ &= f \left|n\, h(r/\rho) + h'(r/\rho)\, \chi_{(-\infty,1)}(r/\rho)\right| \leq \\ &\leq f \max_{t\in[0,1]} |n\, h(t) + h'(t)| \in L^1(S \cap B_R(y)) .\end{aligned}$$

Per il teorema di Lebesgue della convergenza dominata, si può dunque concludere che

$$\begin{aligned}&\rho^{n+1} \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\rho^n} \int_S f\, h(r/\rho) \, d\mathscr{H}^n\right] = \rho^{n+1} \int_S f \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\rho^{-n} h(r/\rho)\right] d\mathscr{H}^n \geq 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\rho} \left[\frac{1}{\rho^n} \int_S f\, h(r/\rho) \, d\mathscr{H}^n\right] \geq 0 .\end{aligned}$$

Definiamo la funzione $I_h\colon (0,R) \to \mathbb{R}$ nel seguente modo:

$$I_h(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_S f\, h(r/\rho)\, d\mathscr{H}^n\,.$$

In particolare oserviamo che, per quanto visto,

$$I_h'(\rho) = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_S f\, h(r/\rho)\, d\mathscr{H}^n\right] \geq 0$$

e quindi I_h non decresce in ρ.
Sia ora $\{h_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C^1(\mathbb{R})$ una successione di funzioni non crescenti, $h_k \geq 0$, $h_{k+1} \geq h_k$ per ogni $k \in \mathbb{N}$ tale che $\lim_{k\to\infty} h_k(t) = \chi_{(-\infty,1)}(t)$. Per convergenza monotona (teorema di Beppo-Levi) si ha che $\lim_{k\to\infty} I_{h_k}(\rho) = I(\rho)$, con

$$I(\rho) = \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{S\cap B_\rho(y)} f\, d\mathscr{H}^n$$

e con un argomento di convergenza dominata analogo a quanto visto in precedenza si può dimostrare che $\lim_{k\to\infty} I_{h_k}'(\rho) = I'(\rho)$. Questo implica che, poichè le I_{h_k} sono non decrescenti in ρ, anche I non decresce in ρ. Inoltre, poiché f è continua, per ogni $y \in S$ si ha

$$\lim_{\rho\to 0^+} I(\rho) = f(y)\,,$$

e dalla non decrescenza di I si ricava

$$f(y) \leq \frac{1}{\omega_n \rho^n} \int_{S\cap B_\rho(y)} f\, d\mathscr{H}^n$$

per ogni $\rho < R$ e per ogni $y \in S$. Con $\rho \to R^-$ si ottiene la (2.13) e quindi la tesi.

□

Il Teorema 2.1 sarà il punto di partenza per arrivare alla stima del gradiente oggetto del prossimo capitolo.

Capitolo 3

Stima del gradiente

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme aperto. Il nostro obiettivo è quello di dimostrare il Teorema 0.1 presentato nell'Introduzione, la stima del gradiente per soluzioni dell'equazione delle superfici minime.
Lavoreremo sempre sotto l'ipotesi di S ipersuperficie in $\mathbb{R}^{n+1}$ definita globalmente come grafico di una funzione $g \in C^2(\Omega)$ che risolve l'equazione (1.4). Dunque la curvatura media di S è identicamente nulla in ogni punto. Ricordiamo che per S così definita (con la scelta della normale che punta verso l'alto) si ha

$$\nu = \frac{(-\nabla g, 1)}{v}, \qquad H = -\frac{1}{n}\,\mathrm{div}(\nu) \equiv 0\,, \qquad \text{dove } v = \sqrt{1 + |\nabla g|^2}.$$

3.1 Riduzione ad una stima del valore medio

Per ogni $\varphi \in C_c^1(\Omega)$ otteniamo l'equazione in forma integrale

$$0 = -\int_\Omega \varphi\,\mathrm{div}(\nu)\,dx = -\int_\Omega [\mathrm{div}(\varphi\,\nu) - \langle \nabla\varphi, \nu\rangle]\,dx = \int_\Omega \langle \nabla\varphi, \nu\rangle\,dx\,. \tag{3.1}$$

Nel caso di $\varphi \in C_c^1(\Omega)$, sostituendo φ con $\partial_k\varphi \in C_c^0(\Omega)$ per $k = 1, \dots, n$ in (3.1), si ha

$$0 = \int_\Omega \langle \nabla(\partial_k\varphi), \nu\rangle\,dx = \int_\Omega [\partial_k(\langle \nabla\varphi, \nu\rangle) - \langle \nabla\varphi, \partial_k\nu\rangle]\,dx\,,$$

e quindi

$$\int_\Omega \langle \nabla\varphi, \partial_k\nu\rangle\,dx = 0\,. \tag{3.2}$$

Ora sostituendo $\nu_k\varphi \in C_c^1(\Omega)$ nella (3.1) si arriva a

$$0 = \int_\Omega \langle \nabla(\nu_k\varphi), \partial_k\nu\rangle\,dx = \int_\Omega [\varphi\langle \nabla\nu_k, \partial_k\nu\rangle + \nu_k\langle \nabla\varphi, \partial_k\nu\rangle]\,dx\,, \tag{3.3}$$

per ogni $k = 1, \dots, n$. Osservando che

$$-v\,\delta_i\nu_{n+1} = \frac{\delta_i v}{v} = \frac{1}{v}[\,\langle \nu, \partial_i(v\nu)\rangle - \langle \nu, \nabla v\rangle\,\nu_i\,] = \frac{1}{v}[\,\langle \nu, \nabla(v\nu_i)\rangle - \langle \nu, \nabla v\rangle\,\nu_i\,] = \langle \nu, \nabla\nu_i\rangle\,,$$

possiamo riscrivere sommando su k la (3.3) nella forma

$$\int_\Omega [\,\mathscr{C}^2\varphi - \langle \nabla\varphi, \delta\nu_{n+1}\rangle v\,]\,dx = 0\,, \tag{3.4}$$

con

$$\mathscr{C}^2 = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i\nu_j\,\partial_j\nu_i = \sum_{i,j=1}^{n+1} (\delta_i\nu_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \geq 0\,.$$

Sia ora $\varphi \in C_c^1(\Omega\times\mathbb{R})$ e $\tilde\varphi(x, x_{n+1}) = \varphi(x, g(x))$, quindi $\varphi = \tilde\varphi$ su S e $\partial_{n+1}\tilde\varphi = 0$. Dalla (2.1a) si ha la relazione

$$\langle \delta\varphi, \delta\nu_{n+1}\rangle = \langle \delta\tilde\varphi, \delta\nu_{n+1}\rangle = \langle \nabla\tilde\varphi, \delta\nu_{n+1}\rangle$$

e quindi sostituendo φ nella (3.4) si ottiene

$$\int_S [\,\mathscr{C}^2\nu_{n+1}\,\varphi - \langle \delta\varphi, \delta\nu_{n+1}\rangle\,]\,d\mathscr{H}^n = 0, \quad \varphi \in C_c^1(\Omega\times\mathbb{R})\,. \tag{3.5}$$

Definiamo la funzione

$$w(x, x_{n+1}) = \log v(x) = -\log \nu_{n+1}(x), \quad w \in C^2(\Omega\times\mathbb{R}),\ w \geq 0$$

e sostituendo φ con $\varphi\, v$ in (3.5), otteniamo grazie alla (2.5)

$$\begin{aligned} 0 &= \int_S [\,\mathscr{C}^2\varphi - \langle \delta(\varphi\, v), \delta\nu_{n+1}\rangle\,]\,d\mathscr{H}^n = \\ &= \int_S [\,\mathscr{C}^2\varphi - \langle \delta\varphi, \frac{\delta\nu_{n+1}}{\nu_{n+1}}\rangle - \varphi\,\langle \delta\Big(\frac{1}{\nu_{n+1}}\Big), \delta\nu_{n+1}\rangle]\,d\mathscr{H}^n = \\ &= \int_S (\,\mathscr{C}^2\varphi + \langle \delta\varphi, \delta w\rangle + \varphi\,|\delta w|^2\,)\,d\mathscr{H}^n = \\ &= \int_S (\,\mathscr{C}^2\varphi - \varphi\,\delta^2 w + \varphi\,|\delta w|^2\,)\,d\mathscr{H}^n\,. \end{aligned}$$

In particolare per ogni $\varphi \in C_c^1(\Omega\times\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$, si ha

$$\int_S \varphi\,(-\delta^2 w + |\delta w|^2\,)\,d\mathscr{H}^n \leq 0 \tag{3.6}$$

e quindi

$$\delta^2 w \geq |\delta w|^2 \geq 0\,.$$

Di conseguenza w è una funzione subarmonica su S che è una superficie minima. Perciò possiamo applicare il Teorema 2.1 ottenendo

$$w(\,y'\,) \leq \frac{1}{\omega_n R^n}\int_{S\,\cap\, B_R(y)} w\,d\mathscr{H}^n \tag{3.7}$$

per ogni $y = (y', y_{n+1}) \in S$, con $R < \mathrm{dist}(y', \partial\Omega)$. Per stimare w, e di conseguenza $|\nabla g|$, è sufficiente stimare $\int_{S\,\cap\, B_r(y)} w\,d\mathscr{H}^n$ per ogni $0 < r < R$.

3.2 Stima di $\int_{S\cap B_r(y)} w\, d\mathscr{H}^n$

Possiamo assumere, a meno di una traslazione, che sia $0 \in \Omega$, $y' = g(y') = 0$ e $3R < \mathrm{dist}(0, \partial\Omega)$. Useremo la notazione $B'_r = \{x' \in \mathbb{R}^n : |x'| < r\}$, $\{|g| < r\} = \{x' \in \Omega : |g(x')| < r\}$ e indicheremo con $C_1, \dots, C_k$ costanti positive dipendenti solamente dalla dimensione n.
Sia $\eta \in C^1_c(\Omega)$ con $\eta \equiv 1$ su B'_r, $\eta \equiv 0$ su $\Omega \setminus B'_{2r}$ e $0 \le \eta \le 1$. Possiamo anche richiedere $|\partial_i \eta| \le 2/r$ per ogni $i = 1, \dots, n$.

Definiamo inoltre per ogni $r \le R$ il troncamento di g nel seguente modo:

$$g_r \colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad g_r(x') = \begin{cases} r & \text{se } g(x') \ge r \\ g(x') & \text{se } -r \le g(x') \le r \\ -r & \text{se } g(x') \le -r. \end{cases}$$

Possiamo quindi sostituire la funzione test (lipschitziana e a supporto compatto)

$$\varphi = \eta w (g_r + r)$$

nell'equazione (3.1), ottenendo

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Omega \langle\, \nabla(\eta w (g_r + r)), \nu \,\rangle\, dx = \\ &= \int_{\{|x'|<r,\ |g|<r\}} \left(\langle \nabla g, \nu \rangle\, w + \langle \nabla w, \nu \rangle\, g + r \,\langle \nabla w, \nu \rangle \right) dx + \\ &\quad + \int_{\{r<|x'|<2r,\ g>r\}} 2r \left(\langle \nabla \eta, \nu \rangle\, w + \langle \nabla w, \nu \rangle\, \eta \right) dx + \\ &\quad + \int_{\{|x'|<r,\ g>r\}} 2r \,\langle \nabla w, \nu \rangle\, dx + \\ &\quad + \int_{\{r<|x'|<2r,\ |g|<r\}} \left(r \,\langle w \nabla \eta + \eta \nabla w, \nu \rangle + \langle w g \nabla \eta + \eta g \nabla w + \eta w \nabla g, \nu \rangle \right) dx\,, \end{aligned}$$

e stimando con la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si arriva a

$$\int_{\{|x'|<r,\ |g|<r\}} \frac{|\nabla g|^2 w}{v}\, dx \le\ 2r \int_{\{|x'|<2r,\ g>-r\}} \left(w |\nabla \eta| + \eta |\nabla w| \right) dx\,. \tag{3.8}$$

Osserviamo che il primo termine si stima facilmente grazie alle proprietà di η e al fatto che $w = \log v \le v$ essendo $v \ge 1$, nel seguente modo:

$$2r \int_{\{|x'|<2r,\ g>-r\}} w\, |\nabla \eta|\, dx \le C_1 \int_{\{|x'|<2r,\ g>-r\}} v\, dx\,. \tag{3.9}$$

Stima di $\int \eta |\nabla w|\, dx$. Per stimare il secondo termine del secondo membro della (3,8), sono necessarie alcune osservazioni e stime preliminari.
Sostituiamo φ^2 al posto di φ nella (3.6) e, usando la (2.5), otteniamo

$$\int_S \varphi^2 |\delta w|^2\, d\mathscr{H}^n \le -2 \int_S \varphi \,\langle \delta\varphi, \delta w \rangle\, d\mathscr{H}^n \le 2 \int_S \varphi\, |\delta \varphi|\, |\delta w|\, d\mathscr{H}^n \tag{3.10}$$

per ogni $\varphi \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})$. Per proseguire, ci torna utile utilizzare un'interpolazione della disuguaglianza di Young, che discende facilmente da un'applicazione di quest'ultima.

Lemma 3.1 (Disuguaglianza di Cauchy)**.** Siano $a,\ b,\ p,\ q > 0$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$ab \leq \frac{\varepsilon\, a^p}{p} + \frac{\varepsilon^{-q/p}\, b^q}{q}\,. \tag{3.11}$$

Applicando quindi il Lemma 3.1 alla (3.10) con $a = |\delta\varphi|,\ b = \varphi\,|\delta w|,\ p = q = 2,\ \varepsilon = 2$ si arriva a

$$\int_S \varphi^2 |\delta w|^2\, d\mathscr{H}^n \leq 4 \int_S |\delta\varphi|^2\, d\mathscr{H}^n\,. \tag{3.12}$$

Scegliamo $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$ con $0 \leq \alpha \leq 1,\ \alpha \equiv 1$ in $(-r,\, \sup_{B'_{2r}} g(x'))$,
$\operatorname{supp}(\alpha) \subseteq [-2r,\, r + \sup_{B'_{2r}} g(x')]$ e $|\alpha'| \leq 2/r$. Definiamo quindi la funzione test

$$\varphi = \eta\, \alpha(x_{n+1})\,, \quad \varphi \in C^1_c(\Omega \times \mathbb{R})\,,$$

con cui si avrà $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq B'_{2r} \times [-2r, r + M(2r)]$. Si ottiene, sostituendo φ nella (3.11) e applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, la seguente disuguaglianza

$$\int_S \varphi^2 |\delta w|^2\, d\mathscr{H}^n \leq \frac{C_2}{r^2}\, \mathscr{H}^n(S \cap \operatorname{supp}(\varphi))\,. \tag{3.13}$$

Proposizione 3.1. Nelle notazioni e definizioni introdotte in questa sezione, si ha la disuguaglianza

$$\int_{\{|x'|<2r,\ g>-r\}} \eta |\nabla w|\, dx \leq \frac{C_3}{r} \int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} v\, dx\,. \tag{3.14}$$

Dimostrazione. Ricordando la formula dell'area (Teorema 1.1), le proprietà di α e la (2.2) si ha

$$\int_{\{|x'|<2r,\ g>-r\}} \eta |\nabla w|\, dx \leq \int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} \varphi\, |\nabla w|\, |\nu_{n+1}|\, v dx \leq \int_{S \cap \operatorname{supp}(\varphi)} \varphi\, |\delta w|\, d\mathscr{H}^n\,.$$

Inoltre, grazie alla disuguaglianza di Hölder (con $p = q = 2$) e alla (3.13)

$$\begin{aligned}\int_{S \cap \operatorname{supp}(\varphi)} \varphi\, |\delta w|\, d\mathscr{H}^n &\leq \Big(\int_S \varphi^2\, |\delta w|^2\, d\mathscr{H}^n\Big)^{1/2} [\mathscr{H}^n(S \cap \operatorname{supp}(\varphi))]^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{C_2}}{r}\, \mathscr{H}^n(S \cap \operatorname{supp}(\varphi)) \leq \\ &\leq \frac{C_3}{r} \int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} v\, dx\,.\end{aligned}$$

□

Ci siamo ridotti, sia nella (3.9) e nella (3.14) alla stima di $\int v\, dx$.

Stima di $\int v\,dx$. Scegliamo una nuova funzione $\eta \in C_c^1(\Omega)$ tale che $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ in B'_{2r}, $\eta \equiv 0$ su $\Omega \setminus B'_{3r}$ e $|\partial_i \eta| \le 2/r$, $i = 1, \dots, n$. Definiamo la funzione test

$$\varphi = \eta \max\{g + 2r, 0\},$$

e sostituiamo φ (funzione lipschitziana) nella (3.1) ottenendo

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\{g>-2r\}} \langle \nabla\varphi, \nu\rangle\, dx = \\
&= \int_{\{g>-2r,\ |x'|<2r\}} \langle \nabla g, \nu\rangle\, dx + \int_{\{g>-2r,\ 2r<|x'|<3r\}} [(g+2r)\langle \nabla\eta, \nu\rangle + \eta\, \langle \nabla g, \nu\rangle]\, dx \le \\
&\le -\int_{\{g>-2r,\ |x'|<2r\}} \frac{|\nabla g|^2}{v}\, dx + \frac{C_4}{r} \int_{\{g>-2r,\ |x'|<3r\}} (g+2r)\, dx\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, notando che $\frac{|\nabla g|^2}{v} = v - \frac{1}{v}$ e $\frac{1}{v} \le 1$, si ha

$$\int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} v\, dx \le \frac{C_4}{r} \int_{\{|x'|<3r,\ g>-2r\}} (g+2r)\, dx + \int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} \frac{1}{v}\, dx$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} v\, dx &\le \frac{C_4}{r}\,(2r + \sup_{B'_{3r}} g(x')\,)\, \mathscr{L}^n(B'_{3r}) + \mathscr{L}^n(B'_{2r}) \le \\
&\le r^n\, (\, C_5 + \frac{C_6}{r} \sup_{B'_{3r}} g(x')\,)\,.
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Combinazione delle stime e conclusione. Ora siamo in grado di stimare $\int w\, d\mathscr{H}^n$ e arrivare al risultato cercato. Infatti, grazie alla (3.8), (3.9), (3.14) e (3.15) si ha

$$\begin{aligned}
\int_{S\,\cap\, B_r(y)} w\, d\mathscr{H}^n &\le \int_{\{|x'|<r,\ |g|<r\}} w\, v dx \le \int_{\{|x'|<r,\ |g|<r\}} w\, dx + \int_{\{|x'|<r,\ |g|<r\}} \frac{|\nabla g|^2 w}{v}\, dx \le \\
&\le (1 + C_1 + 2C_3) \int_{\{|x'|<2r,\ g>-2r\}} v\, dx \le \\
&\le r^n \Big(C_7 + \frac{C_8}{r} \sup_{x' \in B'_{3r}} g(x') \Big)\,.
\end{aligned}$$

Riprendendo la (3.7) e passando agli esponenziali otteniamo

$$|\nabla g(0)| \le \sqrt{1 + |\nabla g(0)|^2} \le C_9 \exp\Big(\frac{C_{10}}{r} \sup_{x' \in \Omega} g(x') \Big)\,.$$

Questo termina la dimostrazione del Teorema 0.1.

Osservazione 3.1. (Stima del gradiente per soluzioni non negative). Se nelle ipotesi del Teorema 0.1 si ha anche $g \ge 0$ possiamo applicare la stima a $h = -g$ che soddisfa la (1.4), ottenendo

$$|\nabla g(x)| = |\nabla h(x)| \le C_{11} \exp\Big(\frac{C_{12}}{d} \sup_{y \in \Omega} [h(y) - h(x)] \Big) \le C_{11} \exp\Big(-\frac{C_{12}}{d}\, h(x) \Big)\,,$$

e quindi

$$|\nabla g(x)| \leq C_{11} \exp\Big(\frac{C_{12}}{d}\, g(x)\Big)\,, \tag{3.16}$$

dove $d = \mathrm{dist}(x,\, \partial\Omega)$ e C_{11} e C_{12} sono costanti dipendenti solamente dalla dimensione n.

Ringraziamenti

Bibliografia

[1] S. N. Bernstein. Sur une théorème de géometrie et ses applications aux équations dérivées partielles du type elliptique. *Comm. Soc. Math. Kharkov*, 15:38–45, 1915-1917.

[2] Enrico Bombieri, Emanuele De Giorgi, and Mario Miranda. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 32:255–267, 1969.

[3] Lawrence Craig Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, chapter 3. CRC press, 2015.

[4] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, volume 40, pages 52–60. John Wiley & Sons, 1999.

[5] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224, pages 328–346. Springer, 1977.

[6] Enrico Giusti. *Metodi diretti nel calcolo delle variazioni*, pages 15–42. Unione matematica italiana, 1994.

[7] Enrico Giusti and Graham H Williams. *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, volume 80, chapter 13, 17. Springer, 1984.

[8] Neil S. Trudinger. A new proof of the interior gradient bound for the minimal surface equation in n dimensions. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 69 4:821–823, 1972.