Università degli Studi di Padova – Facoltà di Ingegneria
Prof. F. Albertini, P. Mannucci, C. Marchi, M. Motta

Analisi Matematica 1

Vicenza, novembre 2008.

Criterio del rapporto (per le successioni)

Teorema Sia a_n una successione a termini positivi. Se la successione $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ converge ad un limite $l < 1$ allora la successione a_n è strettamente decrescente e converge a zero. Se $l > 1$ allora la successione è strettamente crescente e diverge a $+\infty$. Se $l = 1$ non si può dire niente.

Dim. (nel caso $l < 1$)
Dalla definizione di limite, per ogni $\epsilon > 0$ esiste un n_0 tale che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < l + \epsilon$ per ogni $n \geq n_0$. Poiché $l < 1$ scelgo ϵ tale che $l + \epsilon < 1 =: M$. Quindi ottengo che $\frac{a_{n+1}}{a_n} < M < 1$ per ogni $n \geq n_0$, cioè che la successione è strettamente decrescente (per $n \geq n_0$).
Inoltre si ha che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale

$$0 < a_{n_0+k+1} < M a_{n_0+k} < M^2 a_{n_0+k-1} < ..... < M^{k+1} a_{n_0}.$$

Poiché $M < 1$ si ha che la successione geometrica $M^{k+1} \to 0$ per $k \to +\infty$ e quindi si ha che

$$0 < a_{n_0+k+1} < M^{k+1} a_{n_0} \to 0$$

Dal teorema dei Carabinieri e dalle proprietà delle successioni segue che anche $a_n \to 0$ per $n \to +\infty$.