Esercitazione 2

Esercizio 1 (smoothing spline)

Il comando MatLab `csaps` restituisce una spline cubica liscia dato un insieme di dati x e y (`doc csaps`) eseguendo uno smoothing al variare di un parametro p che pesa, mediante combinazione convessa, lo scostamento dai dati e la curvatura (derivata seconda) della funzione. Questo comando trova applicazione quando si desidera "ricostruire" una funzione a partire da una serie di dati affetti da rumore. L'esercizio consiste nel partire da una funzione del tipo

$$f(x) = \sin(t)$$

nell'intervallo $[0, 4\pi]$, aggiungere un rumore gaussiano a media nulla e varianza nota (ad esempio 0.1), ed approssimare la funzione con il comando `csaps` al variare di p.

Per generare un rumore gaussiano si utilizzi il comando MatLab `randn`.

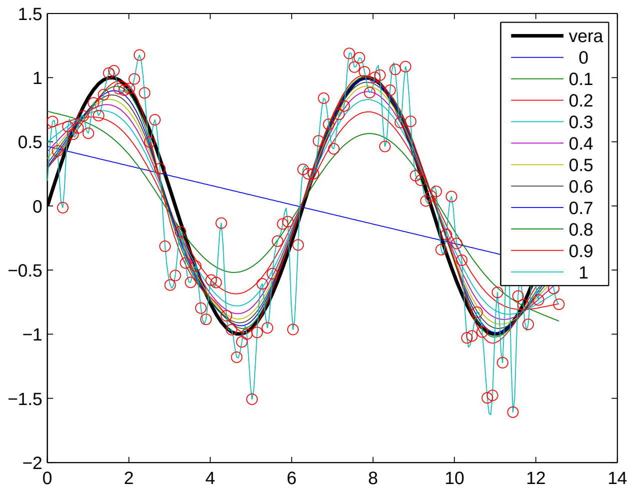

Figura 1: Approssimazione al variare di p.

Esercizio 2

Si valuti il problema dell'interpolazione della funzione di Runge:

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

mediante interpolazione nell'intervallo $I = [-5, 5]$

Si costruiscano i polinomi interpolanti di Lagrange $P_n(x)$ di grado $n = 5, 10$ su nodi equispaziati e si verifichi il tipico fenomeno di Runge.
Si approssimi poi la funzione tramite spline cubica naturale e spline cubica completa interpolante usando sei e undici nodi equispaziati. Si rappresenti graficamente l'andamento delle approssimanti spline e dell'interpolazione di Lagrange.

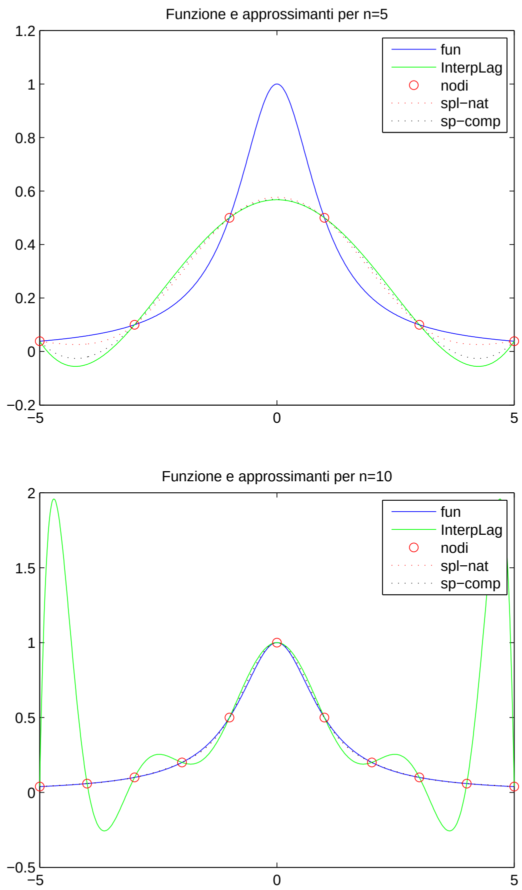

Figura 2: Funzione di Runge.

Si consideri invece la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ -1 & x \geq 0 \end{cases}$$

Si approssimi la funzione in $[-1, 1]$ tramite interpolazione polinomiale e spline cubica naturale e completa interpolante usando n nodi equispaziati, con n numero pari.

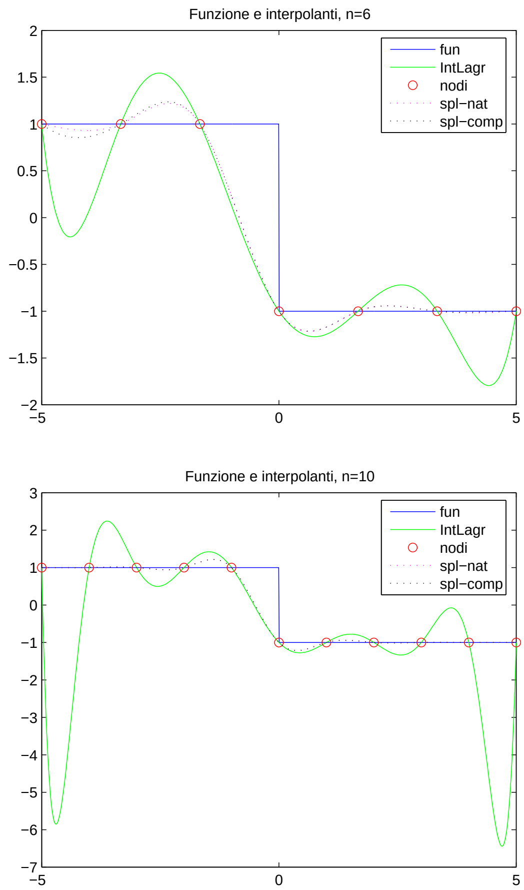

Figura 3: Funzione a gradino.

Esercizio 3

Si consideri la base delle *potenze troncate*

$$\{(t+1)_+, (t-0)_+, (t-\varepsilon)_+, (t-1)_+\}$$

con $\varepsilon > 0$ e piccolo.
Calcolare la spline $s(t)$ di grado 1, che soddisfi le seguenti condizioni nei nodi $x_i = 0, \varepsilon, 1, 2$.

$$s(0) = 1, s(\varepsilon) = -1, s(1) = 0, s(2) = 0.$$

La spline di grado 1 dovrebbe essere identicamente nulla per $t > 1$, si provi a vedere cosa accade per valori abbastanza grandi di t, ($t = 10^{16}$).
Risolvere lo stesso problema di interpolazione usando B-spline di grado 1 e valutarne la stabilità per valori grandi di t.