

Esercitazione 5

Richiami di Teoria

B-spline

Le curve costituite da un unico polinomio sono spesso poco adeguate per descrivere forme geometriche complesse. I principali inconvenienti sono i seguenti:

- per soddisfare un gran numero di vincoli è necessario avere un grado molto elevato, dato che per interpolare n punti dobbiamo utilizzare una curva polinomiale di Bézier di grado $n - 1$. Curve di grado elevato sono però difficili da manipolare e numericamente instabili a causa della proliferazione degli errori di troncamento.
- descrivere una curva con un unico segmento di Bézier non è pratico poiché, anche se è possibile modificare la forma della curva spostando i punti di controllo, lo spostamento interessa comunque tutta la curva.

La soluzione per ovviare a questi inconvenienti è quello di utilizzare curve polinomiali a tratti, cioè della forma

$$C(u) = \sum_{i=0}^n f_i(u)P_i$$

dove i P_i sono i punti di controllo, e i $f_i(u)$ sono funzioni polinomiali a tratti cioè non nulle solo su una porzione limitata dell'intervallo di variazione del parametro u e nulle in tutto il resto dell'intervallo. Questa proprietà di "supporto locale" rappresenta la proprietà che una modifica ad un punto di controllo modifica la curva solo in un intorno del punto di controllo stesso e non dell'intera curva.

La Figura 1 riporta una curva B-Spline di grado 3 definita da 9 punti di controllo. Infatti, ci sono cinque segmenti di una curva di Bézier di grado 3 uniti per formare la curva di B-Spline definita dai punti di controllo. Questi punti suddividono la curva B-Spline in segmenti di una curva di Bézier.

Dato che suddividere la curva direttamente è difficile, conviene suddividere il dominio della curva. Così il dominio della curva $[0, 1]$, può essere suddiviso da punti chiamati "knots".

Noi utilizzeremo le B-Spline.

Una curva B-Spline di grado p è definita come

$$C(u) = \sum_{i=0}^n B_i^p(u)P_i$$

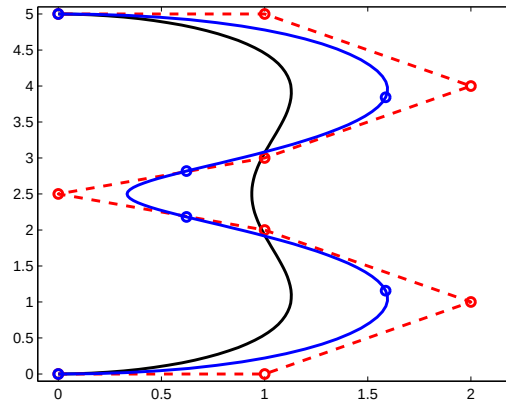


Figura 1: Poligono di controllo (rosso), curva di Bézier (nero), B-Spline di ordine 3 (blu) con relativa suddivisione dovuta ad un vettore dei knots equispaziato.

dove P_i sono gli $n + 1$ punti di controllo e $B_i^p(u)$ sono le funzioni base B-Spline definite su un vettore dei nodi X della forma $X = \underbrace{\{0, \dots, 0\}}_{p+1}, \dots, x_{m-p-1}, \dots, \underbrace{\{1, \dots, 1\}}_{p+1}$.

La procedura di calcolo di un punto sulla curva ad un dato t consiste in 3 passi:

1. trovare a quale sotto-intervallo appartiene t ;
2. calcolare le funzioni di base diverse da zero;
3. moltiplicare il valore delle funzioni base non nulle per i corrispondenti punti di controllo.

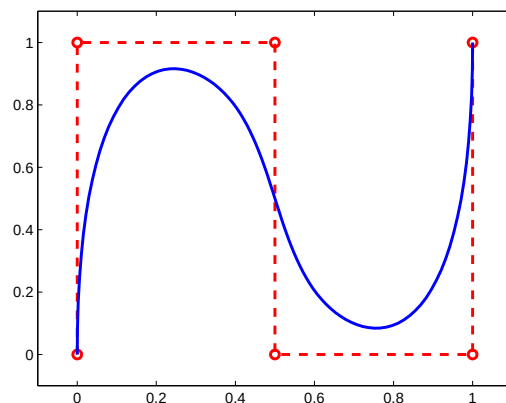


Figura 2: Esempio di B-Spline di grado 3.

Proprietà delle curve B-Spline

Nella Figura 3 riportiamo il poligono di controllo utilizzato per mostrare alcune proprietà delle B-Spline.

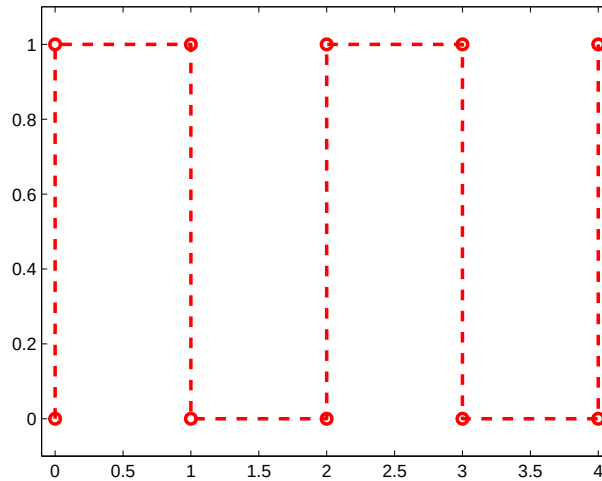


Figura 3: Poligono di controllo.

1. Interpolazione agli estremi se il vettore X è della forma

$$X = \{\underbrace{0, \dots, 0}_{p+1}, x_{p+1}, \dots, x_{m-p-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}\}.$$

2. Invarianza per trasformazioni affini. Nella Figura 4 viene mostrato un esempio di invarianza per rotazione ($p = 3$).

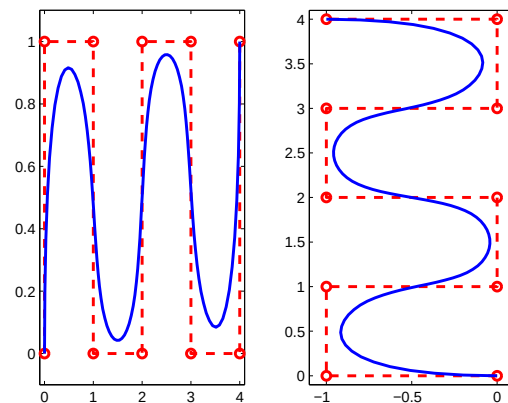


Figura 4: Esempio di rotazione.

3. Modifica locale: muovendo il punto di controllo P_i cambia la curva solo nell'intervallo $[x_i, x_{i+p-1})$. Nella Figura 5 viene mostrato un esempio in cui il terzo punto viene spostato ($p = 2$).

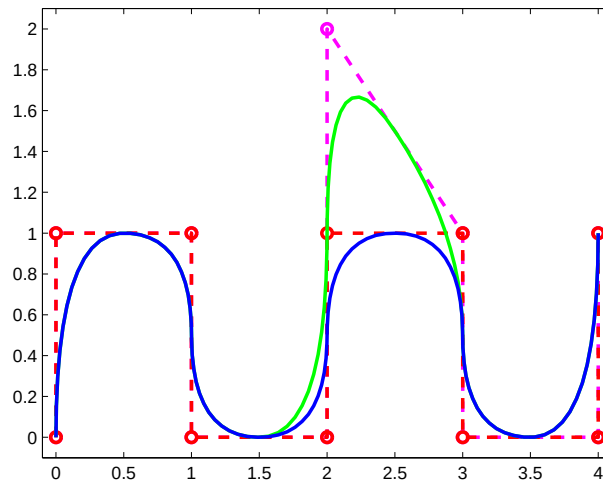


Figura 5: Esempio di modifica locale.

4. Al crescere del grado p tende alla curva di Bézier.

Esercizio 1

Partendo dai dati dell'esempio mostrato in precedenza provare a far variare p da 1 (poligono di controllo) a $9 = 10 - 1$ (curva di Bézier con 10 punti di controllo).

Risultati

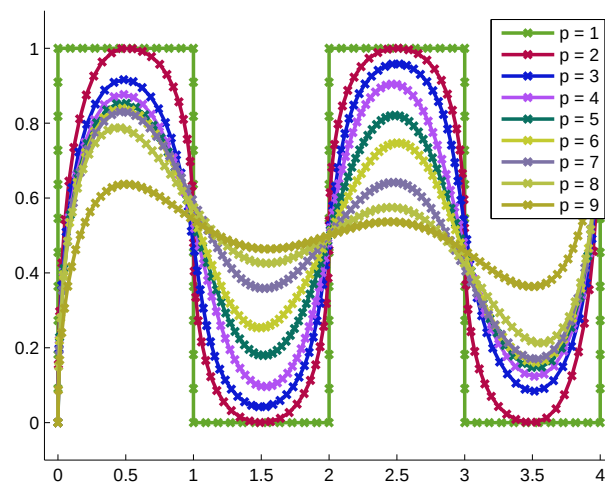


Figura 6: Esempio di aumento del grado.