# ESERCIZI DI ANALISI NUMERICA *

A. SOMMARIVA † E M.R. RUSSO ‡

## 1. Alcuni problemi della teoria dell'approssimazione.

**1.1. Costanti di Lebesgue.** Dato un set di punti distinti $X = \{x_0, \ldots, x_n\}$ nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ si definisce *costante di Lebesgue* la quantità

$$\Lambda_n := \max_{x \in [a,b]} \sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|$$

con al solito $L_i$ *i-simo* polinomio di Lagrange (relativamente al set $x_0, \ldots, x_n$). Sia ora $\phi_0, \ldots, \phi_n$ una base per lo spazio $\mathbb{P}_n$ dei polinomi di grado $n$. Sia $V_n(X)$ la matrice di Vandermonde del set di punti $X$ rispetto alla base $\phi_0, \ldots, \phi_n$. Sia $Y \subset [a, b]$ un sottoinsieme di discreto con cardinalità finita. Se `VX` e `VY` sono rispettivamente $V_n(X)$ e $V_n(Y)$ allora, se l'insieme $Y$ è sufficientemente *fitto*, una buona stima della costante di Lebesgue è data da

```
leb_const=norm(VX'\VY',1);
```

D'altra parte un esempio di base è

```
function V = chebvand(deg,mymesh,intv)

% computes the Chebyshev-Vandermonde matrix at a 1d mesh
% in Chebyshev basis of a rectangle containing
% the mesh points

% INPUT:

% deg = polynomial degree;
% mymesh = 1-columns array of mesh points coordinates;
% intv = interval that contains the mesh.

%OUTPUT:

% V = Chebyshev-Vandermonde matrix

%FUNCTION BODY

if nargin < 3
    intv=[-1 1];
end

% CHEBYSHEV BASIS. SCALED.
a=intv(1); b=intv(2);
xx=(2*mymesh-a-b)/(b-a); % SCALING.
```

*Ultima revisione: 10 febbraio 2011

†DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (ALVISE@MATH.UNIPD.IT)

‡DIPARTIMENTO DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA, UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA, VIA TRIESTE 63, 35121 PADOVA, ITALIA (MRRUSSO@MATH.UNIPD.IT)

```
for index = 1:(deg+1)
    V(:,index)=cos((index-1)*acos(xx)); % VANDERMONDE.
end
```

Si domanda:

1. definiti per $m = n + 1$ i nodi equispaziati nell'intervallo $[-1, 1]$ che determinano l'insieme $X$ e i nodi test
$$Y = \{-1 + hk\},\ k = 0, \ldots, 1000, h = 1/500$$
calcolare approssimativamente la costante di Lebesgue per $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$.
2. definiti per $m = n + 1$ i nodi di Chebyshev
$$X = \{\cos \frac{(2k+1)\pi}{2m}\},\ k = 0, \ldots, m-1$$
e i nodi test
$$Y = \{-1 + hk\},\ k = 0, \ldots, 1000, h = 1/500$$
calcolare approssimativamente la costante di Lebesgue per $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$.

**1.2. Miglior approssimante polinomiale e interpolante polinomiale nei nodi di Chebyshev.** Il metodo di Remez permette di calcolare il polinomio di miglior approssimazione di grado $n$ di una funzione continua $f$ in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Esistono varie implementazioni di tale algoritmo. Utilizzando la versione descritta in

```
R. Pachon e L.N. Trefethen,
"Barycentric-Remez algorithms for best polynomial approximation
 in the chebfun system",
BIT Numer Math (2009) 49, p. 721741,
```

è possibile calcolare, fissato un grado $n$ il polinomio di miglior approssimazione $p^* \in \mathbb{P}_10$.

Vediamo alcuni esempi. Si consideri la funzione $f(x) = \sin(\exp(x))$, $x \in [-1, 1]$ citata in tale pubblicazione a pagina 734. Se il sistema `chebfun` è stato installato nella versione Matlab (per il download si veda la homepage degli autori), il codice

```
% CHEBFUN DI UNA FUNZIONE.
f=chebfun('sin(exp(x))');

% POLINOMIO DI MIGLIOR APPROSSIMAZIONE p (DI GRADO 10)
% ED ERRORE COMPIUTO err.
[p,err]=remez(f,10);

% POLINOMIO p DESCRITTO NELLA BASE MONOMIALE
% pp(1)*x^N + pp(2) * x^{N-1} + ...
pp=poly(p);

% PUNTI TEST.
xx=(-1:0.001:1)';

% VALUTAZIONE DEL POLINOMIO NEI PUNTI TEST.
pxx=polyval(pp,xx);
```

```
% VALUTAZIONE DELLA FUNZIONE NEI PUNTI TEST.
fxx=feval(f,xx);

% ERRORE COMPIUTO.
err2=norm(fxx-pxx,inf);

pp'
err2
```

Si vede che l'errore ottenuto (nella norma 2 nel continuo, cioè $\int_a^b |f(x)|^2\,dx$) è approssimativamente $1.7862e-06$ e che il polinomio $p_{10}^*$ di miglior approssimazione ha coefficienti rispetto alla base monomiale (il primo è quello di grado massimo!)

```
 0.003196437149154
 0.017324847917382
 0.033716160802325
 0.027736791074028
-0.020560308792805
-0.139174865843104
-0.321930004523161
-0.420608521955273
-0.150685513280442
 0.540295397586175
 0.841472656602631
```

Si desidera

1. usando i comandi `polyfit` e `polyval`, valutare nei punti definiti dalla mesh $x = -1 : 0.001 : 1$ il polinomio di grado $10$ che interpola la funzione
$$f(x) = \sin(\exp(x))$$
nei nodi di Chebyshev
$$\cos\frac{(2k+1)\pi}{2m},\ k = 0, \ldots, m-1.$$
Se vogliamo calcolare il polinomio interpolante di grado $10$, che valore deve assumere $m$?
2. calcolare una stima dell'errore in norma infinito compiuto da $p$ nell'approssimare $f$, come
$$\max_{x=-1:0.001:1} |f(x) - p(x)|$$
3. plottare il polinomio di miglior approssimazione $p_{10}^*$ nei punti definiti dalla mesh $x = -1 : 0.001 : 1$;
4. plottare in scala semilogaritmica, nei punti della mesh $x = -1 : 0.001 : 1$, la funzione $|f - p_{10}^*|$;