

Laboratorio numero 4

Manolo Venturin – Roberto Bertelle

Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata

Via Trieste, 63 - 35121 Padova

Successione di Sturm

Calcoliamo la successione di Sturm del polinomio

$$P(x) = 1.0x^5 - 1.0x^4 + 1.0x^2 - 2.0x + 1.0.$$

I primi due polinomi della successione sono

$$P_0(x) = 1.0x^5 - 1.0x^4 + 1.0x^2 - 2.0x + 1.0$$

$$P_1(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x - 2.$$

Gli altri termini sono calcolati mediante ripetute divisioni.

Successione di Sturm

$$P_0(x) = P_1(x)Q_1(x) - P_2(x) \Rightarrow \begin{cases} Q_1(x) = \frac{1}{5}x - \frac{1}{25} \\ P_2(x) = \frac{4}{25}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{38}{25}x - \frac{23}{25} \end{cases}$$

$$P_1(x) = P_2(x)Q_2(x) - P_3(x) \Rightarrow \begin{cases} Q_2(x) = \frac{125}{4}x + \frac{1475}{16} \\ P_3(x) = -\frac{125}{16}x^2 + \frac{875}{8}x - \frac{1325}{16} \end{cases}$$

Successione di Sturm

$$P_2(x) = P_3(x)Q_3(x) - P_4(x) \Rightarrow \begin{cases} Q_3(x) = -\frac{64}{3125}x - \frac{656}{3125} \\ P_4(x) = -\frac{2848}{125}x + \frac{2288}{125} \end{cases}$$

$$P_3(x) = P_4(x)Q_4(x) - P_5(x) \Rightarrow \begin{cases} Q_4(x) = \frac{263}{767}x - \frac{2439}{539} \\ P_5(x) = -\frac{193}{13829} \end{cases}$$

Limitazione superiore delle radici

$$P(x) = 1.0x^5 - 1.0x^4 + 1.0x^2 - 2.0x + 1.0.$$

Uso Mac Laurin

$$x^+ = 1 + \frac{p}{a_0} = 1 + \frac{2}{1} = 1 + 2 = 3, \quad p = \max\{|-1.0|, |-2.0|\}.$$

Limitazione inferiore delle radici

Faccio una trasformazione a radici opposte

$$P_{opp}(x) = P(-x) = -1.0x^5 - 1.0x^4 + 1.0x^2 + 2.0x + 1.0.$$

$a_0 < 0 \Rightarrow$ cambio segno a tutti i coefficienti di $P_{opp}(x)$

$$P_{opp}(x) = 1.0x^5 + 1.0x^4 - 1.0x^2 - 2.0x - 1.0.$$

Applico Mac Laurin a $P_{opp}(x)$

$$x^- = - \left(1 + \frac{p}{a_0} \right) = - \left(1 + \frac{2}{1} \right) = -3.$$

Successione di Sturm completa

$$P_0(x) = 1.0x^5 - 1.0x^4 + 1.0x^2 - 2.0x + 1.0$$

$$P_1(x) = 5x^4 - 4x^3 + 2x - 2$$

$$P_2(x) = \frac{4}{25}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{38}{25}x - \frac{23}{25}$$

$$P_3(x) = -\frac{125}{16}x^2 + \frac{875}{8}x - \frac{1325}{16}$$

$$P_4(x) = -\frac{2848}{125}x + \frac{2288}{125}$$

$$P_5(x) = -\frac{193}{13829}.$$

Separazione con Sturm

	$-\infty$	0	$+\infty$
$P_0(x)$	-	+	+
$P_1(x)$	+	-	+
$P_2(x)$	-	-	+
$P_3(x)$	-	-	-
$P_4(x)$	+	+	-
$P_5(x)$	-	-	-
N_{var}	4	3	1

Conclusioni

- $\Delta_{var} = N_{var}(-\infty) - N_{var}(\infty) = 3$ radici reali.
 - $\deg(P) - \Delta_{var} = 5 - 3 = 2$ radici complesse coniugate.
- Una radice reale nell'intervallo $(-\infty, 0)$.
- Due radici reali nell'intervallo $(0, \infty)$.

In effetti le radici sono

$$x_1 = -1.22074408460576$$

$$x_2 = 1.0000000000000000$$

$$x_3 = 0.72449195900052$$

$$x_4 = 0.24812606280262 + 1.03398206097597i$$

$$x_5 = 0.24812606280262 - 1.03398206097597i$$

Grafico

