

Esercizio 1.

Si calcoli il valore approssimato di

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x+2}$$

utilizzando la formula di Gauss–Legendre.

Sapendo che il valore esatto è $I = \log 3/2$ si dica per quale n si ottiene, dalla successione I_n che approssima I , un errore di

$$|I - I_n| < 10^{-6}.$$

Esercizio 2.

Si calcol l'integrale seguente

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi$$

mediante la formula di Gauss–Hermite.

Si costruisca una tabella del tipo

numero nodi (n)	Errore	Scarto
...
⋮	⋮	⋮
...

dove al variare di n sono riportati l'errore e lo scarto fra due iterate.

Esercizio 3.

Implementare l'algoritmo di Eulero esplicito e di Runge–Kutta del quarto ordine.

Utilizzare gli algoritmi sviluppati per approssimare il seguente problema differenziale

$$\begin{cases} y' = -y + 1.0 \\ y(1.0) = 2.0 \end{cases}$$

Provare gli algoritmi per diversi valori di h quali 0.5, 0.25, 0.125, per calcolare il valore della soluzione nel punto $x = 4.0$.

Riportare l'andamento dell'errore, confrontando il valore ottenuto con il valore esatto dato dalla funzione $y(x) = \exp(-x + 1.0) + 1.0$.

Esercizio 4.

Provare gli algoritmi di Eulero esplicito e Runge–Kutta del quarto ordine per il seguente problema differenziale di ordine due:

$$\begin{cases} y'' - 3y' - y = 0 \\ y(0) = 1.0 \\ y'(0) = 2.0 \end{cases}$$

Riportare l'andamento della soluzione nell'intervallo $[0.0, 1.0]$ utilizzando un passo $h = 0.1$.