

NUMERI ed ERRORI

MANOLO VENTURIN

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIP. DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA

A. A. 2007/2008

INDICE

- Rappresentazione di un numero macchina
 - Interi
 - Virgola mobile (Floating point)
- Esempi di diverse rappresentazioni
- Errore assoluto
- Errore relativo

Rappresentazione di un numero INTERI

BASE 10

1

2

3

4

5

6

7

8

9

Conversione

$$1 = 2^0$$

$$2 = 2^1$$

$$3 = 2^1 + 2^0$$

$$4 = 2^2$$

$$5 = 2^2 + 2^0$$

$$6 = 2^2 + 2^1$$

$$7 = 2^2 + 2^1 + 2^0$$

$$8 = 2^3$$

$$9 = 2^3 + 2^0$$

BASE 2

0000 0001

0000 0010

0000 0011

0000 0100

0000 0101

0000 0110

0000 0111

0000 1000

0000 1001

Rappresentazione di un numero INTERI

- I numeri interi sono rappresentati esattamente in base 2
- Le dimensioni tipiche sono 16 bits o 32 bits
- Nel caso di 16 bits il più grande intero (senza segno) rappresentabile è

$$2^{16} = 65536$$

- Nel caso di intero con segno l'intervallo è [-32768,32767]

Rappresentazione di un numero INTERI

- Non tutti i numeri interi possono essere specificati dal momento che il numero di bits è limitato (Possibilità di overflow).
- In MatLab se non specificato altrimenti tutti i numeri sono rappresentati in virgola mobile a doppia precisione!

Rappresentazione di un numero VIRGOLA MOBILE

- Viene utilizzata per la rappresentazione di numeri con la virgola (non interi)
- Un numero viene convertito in un formato normalizzato e viene salvata **mantissa** ed **esponente** e **segno**.
- **Esempio:**

$$12.2792 = +0.122792 \times 10^2$$

Diagram illustrating the components of the floating-point representation:

- SEGNO (Sign) points to the '+' sign.
- MANTISSA (Mantissa) points to the decimal part '0.122792'.
- ESPONENTE (Exponent) points to the power of 10, '10²'.

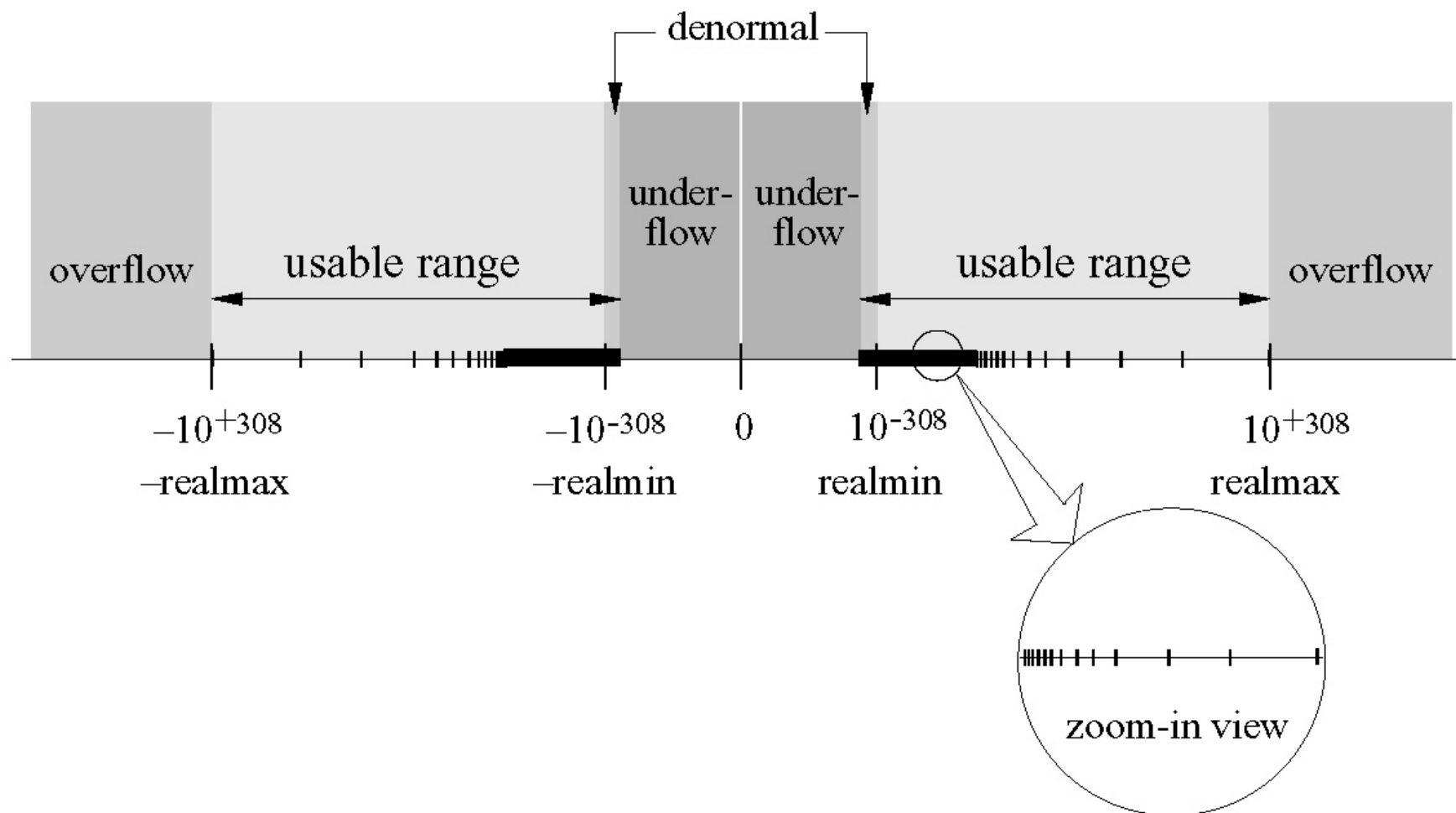
Rappresentazione di un numero VIRGOLA MOBILE

- Lo standard usato nei computer è **IEEE 754**
- In questo standard esistono due tipi di formato:
 - **singola precisione**
1 bit per il segno, 23 bit per la mantissa e 8 bit per l'esponente = 32 bit totali
 - **doppia precisione**
1 bit per il segno, 52 bit per la mantissa e 11 bit per l'esponente = 64 bit totali

Rappresentazione di un numero VIRGOLA MOBILE

- Il numero limitato di bit dell'esponente limita il valore massimo dei numeri rappresentabili
- Il numero limitato di bit della mantissa limita le cifre significative o precisione con cui viene rappresentato un numero.
- I numeri ottenuti da operazioni di altri numeri possono non essere rappresentati esattamente o l'ordine delle operazioni coinvolte non è commutativa.

Rappresentazione di un numero VIRGOLA MOBILE



Operazioni critiche con i numeri in virgola mobile

- Differenza tra due numeri vicini tra loro, questo porta all'errore di cancellazione
- Divisione tra due numeri prossimi allo zero
- Questo porta al fenomeno detto della **cancellazione numerica** e quindi della **perdita di cifre significative** sul risultato

Esempio somma di numeri

Consideriamo la seguente espressione algebrica

$$4 + 0.4 + 0.4 = 4.8$$

e verifichiamo se è vera nei numeri macchina.

[vedere il file: [sommanum.m](#)]

Esempio somma di numeri

```
>> somma di numeri
```

```
>> format long e
```

```
>> 4
```

```
>> ans+0.4
```

```
>> ans+0.4
```

```
>> ans == 4.8
```

```
0
```

Esempio somma di numeri

>> % La verifica corretta e' mediante
una tolleranza

>> format long e

>> 4

>> ans+0.4

>> ans+0.4

>> abs(ans - 4.8) <= 1e-10

1

Esempio:

Effetti aritmetica del computer

Consideriamo la seguente espressione algebrica

$$\frac{(1+x)-1}{x}$$

che è equivalente a 1 per ogni x diverso da 0.

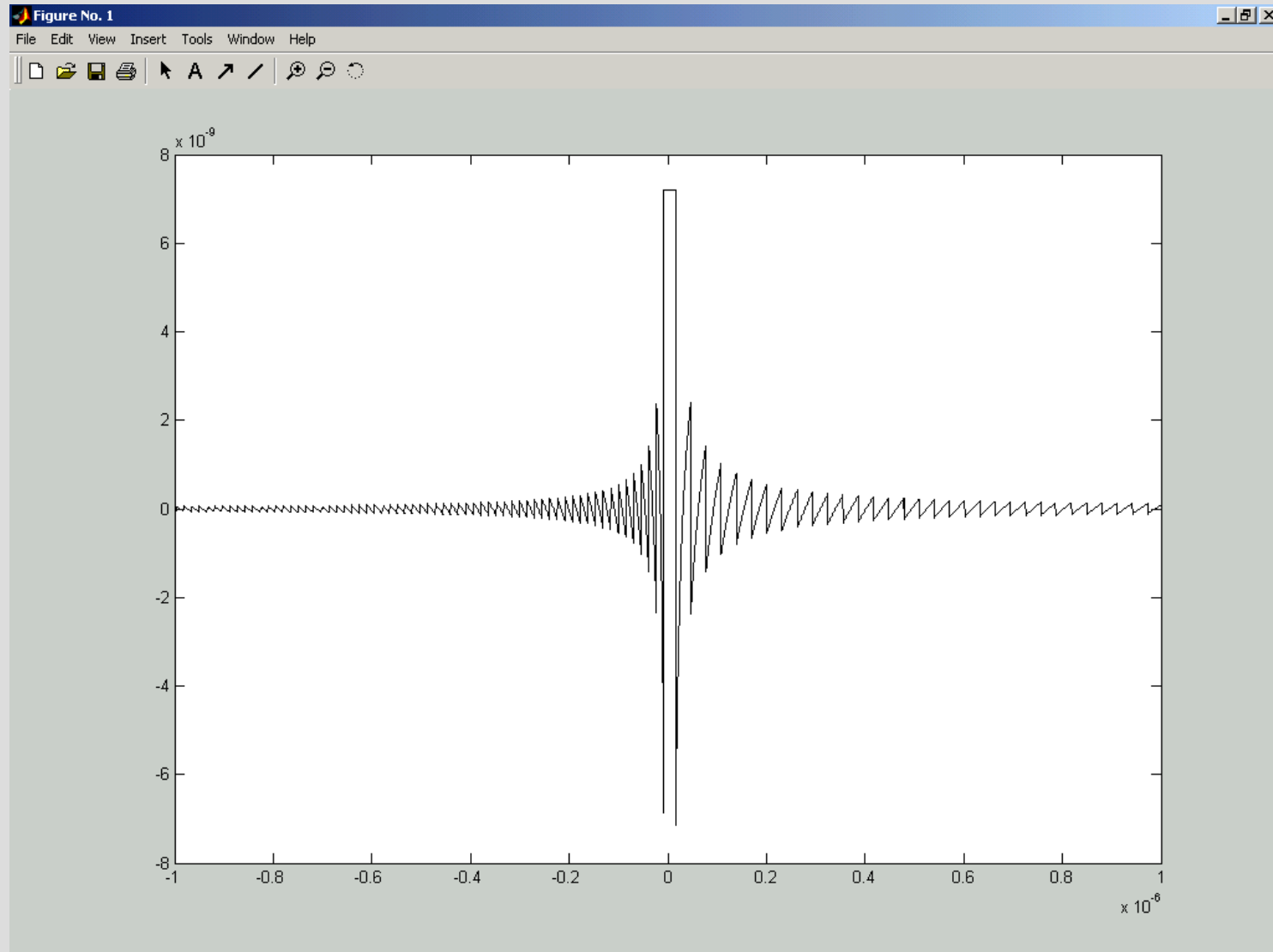
[vedere il file: [funz1.m](#)]

Esempio:

Effetti aritmetica del computer

```
>> grafico funzione unitaria  
>> x = linspace(-1e-6,1e-6,10000);  
>> y = (1+x)-1)./x;  
>> figure(1);  
>> plot(x,1-y,'k-');
```

Esempio: Effetti aritmetica del computer



Esempio

Equazione di secondo grado

Le radici di

$$a x^2 + b x + c = 0$$

sono

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esempio

Equazione di secondo grado

Nel caso in cui il polinomio sia

$$x^2 - 2s x + p = 0$$

si ha

$$x_{1,2} = s \pm \sqrt{s^2 - p}$$

dove:

- s è la somma delle due radici divisa per due
- p il loro prodotto

Esempio

Equazione di secondo grado

Una formula numericamente più stabile può essere ottenuta razionalizzando la formula precedente.

In particolare si ha:

$$x_2 = \frac{p}{s + \sqrt{s^2 - p}}$$

$$x_1 = p / x_2$$

[Vedere il file: [mainrad.m](#)]

Esempio

Equazione di secondo grado

```
>> % metto x1 la radice piu' grande
```

```
>> x1e = 10^5;
```

```
>> x2e = -1.0e-2;
```

```
>> % calcolo s e p
```

```
>> s = (x1e+x2e)/2;
```

```
>> p = x1e*x2e;
```

```
>> % calcolo le radici con prima formula
```

```
>> x1 = s + sqrt(s*s-p);
```

```
>> x2 = s - sqrt(s*s-p);
```

Esempio

Equazione di secondo grado

```
>> % calcolo le radici con seconda formula
>> x2n = p/(s + sqrt(s*s-p));
>> x1n = p/x2n;

% confronto risultati
>> x1e , x1n, x2

>> x2e, x2n, x2
```

Esempio

Equazione di secondo grado

>> % Risultati

x1e =

100000

x1n =

100000

x1 =

100000

x2e =

-1.000000000000000000e-002

x2n =

-1.000000000000000000e-002

x2 =

-1.0000000000203727e-002

Errore Assoluto ed Errore Relativo

- Errore assoluto

$$e_{assoluto} = |x_{vero} - x_{approssimato}|$$

- Errore relativo

$$e_{relativo} = \frac{|x_{vero} - x_{approssimato}|}{|x_{vero}|}$$