

SISTEMI LINEARI METODO DI GAUSS

MANOLO VENTURIN

**UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA
DIP. DI MATEMATICA PURA ED APPLICATA**

A. A. 2007/2008

INDICE

- Sistemi lineari
- Metodo di eliminazione di Gauss

SISTEMI LINEARI

ESEMPIO

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & +4x_3 & -3x_4 & = & 2 \\ 4x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & -4x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & 5 \end{array}$$

METODO DI ELIMINAZIONE GAUSSIANA

- Il metodo di **eliminazione gaussiana** consiste nel **trasformare** il sistema originale in un sistema **triangolare superiore** (zero sulla parte sottostante la diagonale della matrice) **mediante eliminazione** di una riga alla volta del sistema.

METODO DI ELIMINAZIONE GAUSSIANA

- Le trasformazioni che utilizzo sono:
 - Moltiplicazione di un'equazione per una costante non nulla;
 - Addizione del multiplo di un'equazione con un'altra equazione non nulla;
 - Scambio di due equazioni.

ESEMPIO

Considero la variabile “x1” della “1a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$$

ELIMINO LA 2a RIGA

“2a RIGA” = “2a RIGA” - (1/2) “1a RIGA”

$$x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 2$$

—

$$\frac{1}{2} (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1)$$

=

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

2a RIGA ELIMINATA

“2a RIGA” = “2a RIGA” - (1/2) “1a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$$

ELIMINO LA 3a RIGA

“3a RIGA” = “3a RIGA” - (4/2) “1a RIGA”

$$\begin{array}{rclclcl} \textcircled{2}x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & -\frac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & \frac{3}{2} \\ \textcircled{4}x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

ELIMINO LA 3a RIGA

“3a RIGA” = “3a RIGA” - (4/2) “1a RIGA”

$$4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2$$

—

$$\frac{4}{2} (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1)$$

=

$$-3x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0$$

3a RIGA ELIMINATA

“3a RIGA” = “3a RIGA” - (4/2) “1a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-3x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0$$

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$$

ELIMINO LA 4a RIGA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - (3/2) “4a RIGA”

$$\begin{array}{rclclcl} \textcircled{2}x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 1 \\ & & -\frac{7}{2}x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & \frac{3}{2} \\ & & -3x_2 & - & 9x_3 & + & 5x_4 & = & 0 \\ \textcircled{3}x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \end{array}$$

ELIMINO LA 4a RIGA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - (3/2) “4a RIGA”

$$3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 5$$

—

$$\frac{3}{2} (2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1)$$

=

$$-\frac{17}{2}x_2 - 4x_3 + x_4 = \frac{7}{2}$$

4a RIGA ELIMINATA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - (3/2) “4a RIGA”

$$\begin{array}{cccccc} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ & -\frac{7}{2}x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & \frac{3}{2} \\ & -3x_2 & -9x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ & -\frac{17}{2}x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & \frac{7}{2} \end{array}$$

NUOVO PASSO

Considero la variabile “x2” della “2a RIGA”

$$\begin{array}{rrcrcl} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ & -\frac{7}{2}x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & \frac{3}{2} \\ & -3x_2 & -9x_3 & +5x_4 & = & 0 \\ & -\frac{17}{2}x_2 & -4x_3 & +x_4 & = & \frac{7}{2} \end{array}$$

ELIMINO LA 3a RIGA

$$\text{"3a RIGA"} = \text{"3a RIGA"} - (-3/(-7/2)) \text{"2a RIGA"}$$

$$-3x_2 - 9x_3 + 5x_4 = 0$$

$$\frac{-3}{-7} \left(-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 \right) = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

3a RIGA ELIMINATA

“3a RIGA” = “3a RIGA” - (-3/(-7/2)) “2a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$-\frac{17}{2}x_2 - 4x_3 + x_4 = \frac{7}{2}$$

ELIMINO LA 4a RIGA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - $(-(17/2)/(-7/2))$ “2a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$\left(-\frac{7}{2}x_2\right) + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$\left(-\frac{17}{2}x_2\right) - 4x_3 + x_4 = \frac{7}{2}$$

4a RIGA ELIMINATA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - $(-(17/2)/(-7/2))$ “2a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$-\frac{62}{7}x_3 + \frac{41}{7}x_4 = -\frac{1}{7}$$

NUOVO PASSO

Considero la variabile “x3” della “3a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$-\frac{62}{7}x_3 + \frac{41}{7}x_4 = -\frac{1}{7}$$

4a RIGA ELIMINATA

“4a RIGA” = “4a RIGA” - $(-(62/7)/(-75/7))$ “3a RIGA”

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$\frac{161}{525}x_4 = \frac{483}{525}$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

- Adesso è possibile risolvere il sistema lineare mediante delle sostituzioni all'indietro
- Cioè si risolve per la **variabile x_4** ,
poi per la **variabile x_3** (nota x_4),
poi per la **variabile x_2** (nota x_4 e x_3)
ed infine per la **variabile x_1** (nota x_4 , x_3 e x_2)

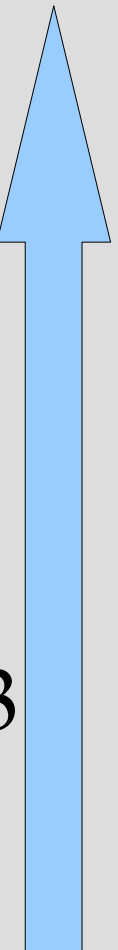
RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

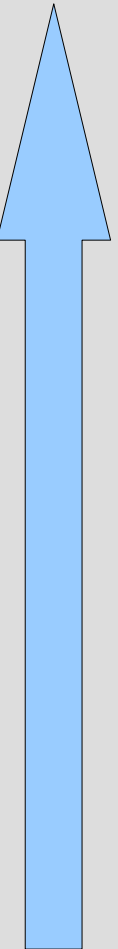
$$-\frac{75}{7}x_3 + \frac{47}{7}x_4 = -\frac{9}{7}$$

$$x_4 = \frac{483}{525} \cdot \frac{525}{161} = 3$$



RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{array}{rcccccl} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ & -\frac{7}{2}x_2 & +2x_3 & -2x_4 & = & \frac{3}{2} \\ & & -\frac{75}{7}x_3 & & = & -\frac{9}{7} - \frac{47}{7}x_4 \\ & & & x_4 & = & 1 \end{array}$$



RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \left(-\frac{9}{7} - \frac{47}{7} \cdot 3\right) \left(-\frac{7}{75}\right)$$

$$x_4 = 3$$

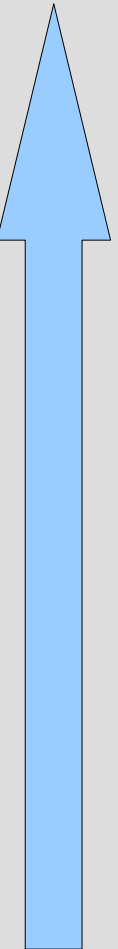
RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1$$

$$-\frac{7}{2}x_2 + 2x_3 - 2x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 3$$



RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

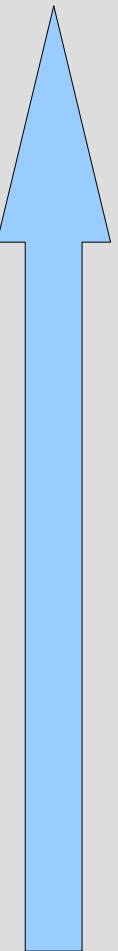
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ -\frac{7}{2}x_2 &= \frac{3}{2} + 2x_4 - 2x_3 \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_2 &= \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 2\right)\left(-\frac{2}{7}\right) \\ x_3 &= 2 \\ x_4 &= 3 \end{aligned}$$

RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & +3x_2 & +4x_3 & -2x_4 & = & 1 \\ & x_2 & & & = & -1 \\ & & x_3 & & = & 2 \\ & & & x_4 & = & 3 \end{array}$$



RISOLUZIONE DEL SISTEMA LINEARE

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

$$x_3 = 2$$

$$x_4 = 3$$

METODO DI GAUSS MIGLIORAMENTI

- Tutte le operazioni le ho potute fare perché gli elementi sulla diagonale sono diversi da zero, altrimenti nel calcolo dei coefficienti mi capitava di dividere per zero.
- Se ciò accade posso sempre scambiare righe sottostanti alla riga presa in considerazione; questa operazione di scambio è nota come tecnica di pivoting
- Viene anche eseguita ad ogni passo portando l'elemento massimo sotto la diagonale in posizione diagonale per aumentare la stabilità del metodo.

METODO DI GAUSS

- Vedere il file di esempio per l'implementazione del metodo.