

Esercizio 1.

Si consideri il seguente problema ai limiti

$$-u'' = f \quad \text{in } (0, 1)$$

soggetto alle condizioni

$$u(0) = 0 \quad \text{ed} \quad u(1) = 0$$

dove $f = 1$.

Risolvere tale problema mediante il metodo delle differenze finite.

Confrontare la soluzione ottenuta con quella teorica.

Esercizio 2.

Si consideri il seguente problema ai limiti

$$-u'' = f \quad \text{in } (0, 1)$$

soggetto alle condizioni

$$u(0) = 0 \quad \text{ed} \quad u(1) = 0$$

dove $f = 1$.

Risolvere tale problema mediante il metodo agli elementi finiti.

Confrontare la soluzione ottenuta con quella teorica.

Suggerimento: Per ottenere la formulazione debole si moltiplichi l'equazione differenziale per una funzione test $v \in V \equiv H_0^1(0, 1)$; si applichi successivamente l'integrazione per parti tenendo conto delle condizioni al contorno.

Fatto questo si arriva a scrivere il seguente problema debole: Trovare $u \in V$ tale che

$$\int_0^1 u'v' dx = \int_0^1 f dx \quad \forall v \in V.$$

Si costruisca successivamente una mesh uniforme (*linspace* [MatLab]) di $[0, 1]$; si calcoli gli integrali elementari per ogni singolo elemento $K_{ji} = \int_a^b N_i' N_j' dx + \int_a^b N_i N_j dx$ ed $f_j = \int_a^b f N_j dx$ dove N_i, N_j sono le funzioni di forma relative al nodo x_i e x_j e a e b sono gli estremi dell'intervallo. Successivamente dagli integrali locali si costruisca la matrice globale di rigidezza K ed il vettore dei carichi f (*sparse* [Matlab]) e si applichi le condizioni al contorno mediante la tecnica di eliminazione delle righe. Si risolva il sistema ottenuto $Kx = f$ e si confronti la soluzione ottenuta con la soluzione teorica.

Esercizio 3.

Si consideri il seguente problema ai limiti

$$-u'' + u = f \quad \text{in } (0, 1)$$

soggetto alle condizioni

$$u(0) = 1 \quad \text{ed} \quad u(1) = 1 - \sinh(1)$$

dove $f = 1$.

Risolvere tale problema mediante il metodo agli elementi finiti.

Confrontare la soluzione ottenuta con quella teorica ($u(x) = 1 - \sinh(x)$).

Osservazione.

Si possono utilizzare nella risoluzione degli esercizi tutte le routine Matlab relative ad un linguaggio standard di programmazione (es. for, while, if, else, ...) ed alcune funzioni quali *nchoosek* e l'operatore di indicizzazione vettorizzata "colon" \therefore .

Sono invece vietate l'utilizzo di tutte quelle routine Matlab che implementano algoritmi di calcolo numerico. Ad esempio: roots, fzero, eig, inv, deconv, conv, pcg, lu, polyval, det, routine di calcolo simbolico, \ e / applicati alla risoluzione di sistemi lineari.