Teorema. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ monotona. Allora f è Riemann-integrabile in $[a,b]$.

Prova. Supponiamo –senza perdita di generalità– che f sia crescente. Scelta una partizione $\mathcal{P}$:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

la somma inferiore $s(\mathcal{P})$ e quella superiore $S(\mathcal{P})$ corrispondenti sono

$$s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{con} \quad m_k := \inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$$

e

$$S(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) \quad \text{con} \quad M_k := \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Ora, essendo f crescente, risulta (aiutarsi con un disegno!)

$$m_k = f(x_{k-1}) \quad \text{e} \quad M_k = f(x_k)$$

da cui

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})](x_k - x_{k-1}). \tag{1}$$

Sia infine

$$\delta := \max_{k=1\ldots n} (x_k - x_{k-1})$$

ovvero l'ampiezza massima degli intervalli $x_k - x_{k-1}$ relativi alla partizione $\mathcal{P}$. Allora (cfr. (1))

$$\begin{aligned} S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) &\leq \delta \sum_{k=1}^{n} [f(x_k) - f(x_{k-1})] \\ &= \delta[f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(x_n) - f(x_{n-1})] \\ &= \delta[f(x_n) - f(x_0)] = \delta[f(b) - f(a)]. \end{aligned}$$

Conseguentemente, basta scegliere $\delta < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$ per ottenere

$$S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon.$$

Il teorema segue dalla Caratterizzazione delle funzioni Riemann-integrabili (cfr. pag. 206 del libro di testo). $\square$

Nota bene. Non è stata assunta la continuità di f.