ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - PRIMA SETTIMANA *†

ANDREA PAVAN

Martedì 19 ottobre

Esercizio 1. Indichiamo con A e B due matrici della stessa dimensione. Dimostrare che
$$(A+B)^T = A^T + B^T.$$
(Il simbolo M^T si usa per indicare la trasposta della matrice M.)

Esercizio 2. Calcolare le soluzioni di
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}.$$
(Usando il metodo visto assieme: (i) scrivere la matrice associata al sistema lineare, (ii) trasformarla in una matrice a scala, eventualmente in forma ridotta, usando l'algoritmo di Gauss e (iii) risolvere il sistema lineare associato a quest'ultima.)

Soluzione. L'unica soluzione è
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Calcolare le soluzioni di
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}.$$

Soluzione. Non esistono soluzioni.

Mercoledì 20 ottobre

Esercizio 1. Trasformare
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$
in una matrice in forma a scala *ridotta* usando l'algoritmo di Gauss. Scrivere il sistema lineare associato ad A e calcolare le sue soluzioni.

Soluzione. La matrice in forma a scala ridotta è
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$
Il sistema lineare associato ad A è
$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ -x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}.$$

---

* Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

† Versione di giovedì 28 ottobre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.

e la sua unica soluzione è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare le soluzioni di

$$\begin{cases} -2x_3 = 3 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Soluzione. Non ci sono soluzioni.

Esercizio 3. Calcolare le soluzioni di

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 + x_4 = -2 \end{cases}.$$

Soluzione. Le soluzioni sono tutti e soli i vettori-colonna del tipo

$$\begin{pmatrix} 1-s \\ s \\ 2+t \\ t \end{pmatrix}$$

per qualche scelta dei parametri s e t. *(Si dice anche che il precedente vettore-colonna è una "soluzione generale" per il sistema lineare.)*

Giovedì 21 ottobre

Esercizio 1. Indichiamo con S un sistema lineare *omogeneo.* Dimostrare che:

(i) il vettore-colonna nullo (con tante righe quante sono le incognite di S) è una soluzione di S,
(ii) se il vettore-colonna X è soluzione di S, allora per ogni scalare s anche sX è soluzione,
(iii) se i vettori-colonna X_1 e X_2 sono soluzioni di S, anche $X_1 + X_2$ lo è.

Esercizio 2. Indichiamo con S il sistema lineare (*non* omogeneo, con una sola equazione)

$$\{x_1 - x_2 = 1\ .$$

Dimostrare che:

(i) il vettore-colonna nullo (con due righe) *non* è soluzione di S,
(ii) esistono un vettore-colonna X che è soluzione di S e uno scalare s tali che sX non è soluzione,
(iii) esistono due vettori-colonna X_1 e X_2 che sono soluzione di S ma tali che $X_1 + X_2$ non lo è.

(Gli enunciati (i), (ii) e (iii) sono la negazione dei corrispondenti enunciati dell'esercizio precedente.)

Soluzione. Per dimostrare (ii) si può scegliere (per esempio)

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad s = 2.$$

Per (iii),

$$X_1 = X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$