Algebra e Geometria per Informatica
Primo Appello
14 dicembre 2010
Tema B

Nome e Cognome:

Matricola:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Consideriamo la funzione
$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto z^2 - 2.$$
Dire, motivando la risposta, se f è iniettiva e se è suriettiva. Inoltre, dire quanti sono e scrivere nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, gli elementi dell'insieme
$$f^{-1}(-5) = \big\{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } f(z) = -5\big\}.$$

2. Mostrare, utilizzando il principio di induzione, che
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ (-1)^{n-1}n & (-1)^n \end{pmatrix}$$
per ogni intero $n \geq 1$. *(Nota: ricordare che* $(-1)^0 = 1$*.)*

3. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza
$$30x \equiv 6 \pmod{44}.$$
Inoltre, dire quante sono ed elencare le soluzioni dell'equazione
$$[30][x] = [6] \text{ in } \mathbb{Z}_{44}.$$

4. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Sia $U = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$.

   (a) Determinare una base per U

   (b) Determinare una base per il complemento ortogonale $U^{\perp}$.

   (c) Dire se il vettore $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$ appartiene o meno ad U.

6. Sia $W = \left\{ \begin{bmatrix} x - 2y - z \\ y + z \\ 2x + y + 3z \end{bmatrix}, x,\, y,\, z \in \mathbb{R} \right\}$

   (a) Dimostrare che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

   (b) Dire se $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base per W.

   (c) Dire se $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ è una base ortogonale di W.

   (d) Trovare i vettori di W ortogonali al vettore $X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

7. Si determinino equazioni parametriche e cartesiane per la retta r passante per il punto P di coordinate $(1, -1, 2)$ e parallela al vettore $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dire se il punto A di coordinate $(2, 2, 1)$ appartiene alla retta r. Scrivere un'equazione cartesiana del piano π che contiene r e il punto B di coordinate $(1, 1, 0)$.

8. Siano $X_1, X_2, \ldots, X_k$ vettori non nulli di $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che se essi sono linearmente dipendenti allora non possono essere a due a due ortogonali.