

Algebra e Geometria per Informatica
Prima Prova Parziale
6 novembre 2009
Tema A

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Trovare tutte le soluzioni del sistema lineare

$$\begin{aligned}3x_1 + x_2 - x_3 + 8x_4 &= -4 \\-x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 0 \\9x_1 - x_2 + x_3 + 4x_4 &= -8 \\2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 12x_4 &= -4\end{aligned}$$

Trovare inoltre le soluzioni del sistema omogeneo associato ed un insieme di soluzioni-base per il sistema omogeneo associato.

2. Si dimostri per induzione che, per $n \geq 1$ vale

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2(2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 1) & 1 \end{pmatrix}$$

3. Siano date le applicazioni

$$\begin{aligned}f: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\z &\mapsto 3z - 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g: \mathbb{Z} &\rightarrow \mathbb{Q} \\z &\mapsto \frac{z^2}{6}\end{aligned}$$

Dimostrare che f è iniettiva e che g non lo è. Dire, motivando la risposta, se f e g sono biettive.

4. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un parametro e sia data la matrice

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ \lambda + 2 & \lambda & -\lambda \\ 0 & \lambda + 2 & \lambda + 4 \end{pmatrix}$$

Dire per quali valori del parametro λ la matrice A_λ è invertibile. Determinare la matrice inversa per $\lambda = -2$.

5. Siano X ed Y due insiemi. Dimostrare che $(X \cup Y) \cap Y = Y$.

6. Calcolare

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

7. Data la congruenza

$$42x \equiv 30 \pmod{130}$$

- (a) si trovino tutte le soluzioni
- (b) si elenchino le soluzioni comprese tra -100 e 100
- (c) si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$[42][x] = [30] \quad \text{in } \mathbb{Z}/(130)$$

8. Si dimostri che se le due congruenze

$$\begin{cases} x \equiv 0 \pmod{a} \\ x \equiv 1 \pmod{b} \end{cases}$$

hanno una soluzione c in comune, allora a, b sono primi tra loro.