

**Algebra e Geometria per Informatica**  
**Prima Prova Parziale**  
**16 novembre 2010**  
**Tema B**

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Consideriamo il sistema lineare

$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = -4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 5 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \\ -2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 8x_4 = 11 \end{cases} .$$

- (i) Calcolare un insieme di soluzioni-base del sistema omogeneo associato a (\*).
- (ii) Descrivere le soluzioni del sistema omogeneo associato a (\*). [Suggerimento: utilizzare il punto (i).]
- (iii) Calcolare una soluzione particolare di (\*).
- (iv) Descrivere le soluzioni di (\*). [Suggerimento: utilizzare i punti (ii) e (iii).]

2. Dimostrare che per ogni numero naturale  $n$ , l'intero

$$7^n - 1$$

è divisibile per 6. [Suggerimento: utilizzare il principio di induzione.]

3. Dimostrare che la funzione

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \quad x \mapsto 5x + 2$$

è iniettiva e non è suriettiva. Inoltre dire, motivando la risposta, se la funzione

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \quad x \mapsto |x - 3|$$

è iniettiva e se è suriettiva.

4. Calcolare i valori del parametro  $\lambda \in \mathbb{R}$  per i quali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -\lambda & 3\lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

è invertibile. Determinare la matrice inversa di  $A$  nel caso in cui  $\lambda = 0$ .

5. Scrivere nella forma  $a + ib$  con  $a, b \in \mathbb{R}$  il numero complesso

$$\frac{(3 - 2i)^2 - 3i}{1 + 2i}.$$

6. Determinare la matrice  $X = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

7. Data la congruenza

$$87x \equiv -12 \pmod{168}$$

- (a) si trovino tutte le soluzioni
- (b) si elenchino le soluzioni comprese tra  $-100$  e  $100$
- (c) si dica quante sono le soluzioni dell'equazione

$$[87][x] = [-12] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{168}$$

8. Dati gli interi  $a, b$  con  $a \neq b$ , supponiamo che le due congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{r} \\ x \equiv b \pmod{s} \end{cases}$$

abbiano una soluzione  $c$  in comune. Si può concludere allora che  $r, s$  sono primi tra loro? (breve dimostrazione o controesempio)