Algebra e Geometria per Informatica
Prima Prova Parziale
16 novembre 2010
Tema C

Nome e Cognome:

Matricola:

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Consideriamo il sistema lineare
$$(*) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 4 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -5 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ -2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 7x_4 = -9 \end{cases}.$$
   (i) Calcolare un insieme di soluzioni-base del sistema omogeneo associato a $(*)$.
   (ii) Descrivere le soluzioni del sistema omogeneo associato a $(*)$. [Suggerimento: utilizzare il punto (i).]
   (iii) Calcolare una soluzione particolare di $(*)$.
   (iv) Descrivere le soluzioni di $(*)$. [Suggerimento: utilizzare i punti (ii) e (iii).]

2. Dimostrare che per ogni numero naturale n, l'intero
$$8^n - 1$$
è divisibile per 7. [Suggerimento: utilizzare il principio di induzione.]

3. Dimostrare che la funzione
$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \quad x \mapsto 5x + 3$$
è iniettiva e non è suriettiva. Inoltre dire, motivando la risposta, se la funzione
$$g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad x \mapsto |x - 2|$$
è iniettiva e se è suriettiva.

4. Calcolare i valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ per i quali

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & \lambda & 0 \\ -\lambda & -2\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

è invertibile. Determinare la matrice inversa di A nel caso in cui $\lambda = 0$.

5. Scrivere nella forma $a + ib$ con a, $b \in \mathbb{R}$ il numero complesso

$$\frac{(3+2i)^2 + 3i}{1-2i}.$$

6. Determinare la matrice $X = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tale che

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Data la congruenza

$$81x \equiv -12 \pmod{87}$$

   (a) si trovino tutte le soluzioni

   (b) si elenchino le soluzioni comprese tra -100 e 100

   (c) si dica quante sono le soluzioni dell' equazione

$$[81][x] = [-12] \quad \text{in} \quad \mathbb{Z}_{87}$$

.

8. Dati gli interi a, b con $a \neq b$, supponiamo che le due congruenze

$$\begin{cases} x \equiv a \pmod{r} \\ x \equiv b \pmod{s} \end{cases}$$

abbiano una soluzione c in comune. Si può concludere allora che r, s sono primi tra loro? (breve dimostrazione o controesempio)