ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - QUARTA SETTIMANA [*†]

ANDREA PAVAN

Lunedì 8 novembre

Esercizio 1. Mostrare che la relazione $\sim$ su $\mathbb{R}^2$ definita da
$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se e solo se esiste } s \in \mathbb{R} \text{ tale che } (a, b) = s(c, d)$$
non è simmetrica.

Soluzione. Per esempio,
$$(0, 0) \sim (1, 1)$$
e
$$(1, 1) \not\sim (0, 0).$$

Esercizio 2. Consideriamo la relazione d'equivalenza $\sim$ su $\mathbb{R}^2$ definita da
$$(a, b) \sim (c, d) \text{ se e solo se esiste } 0 \neq s \in \mathbb{R} \text{ tale che } (a, b) = s(c, d).$$
Calcolare le classi d'equivalenza di $(0, 0)$, di $(0, 1)$ e di $(1, c)$ per ogni $c \in \mathbb{R}$. Mostrare che tali classi d'equivalenza sono tutte distinte, e che ogni classe d'equivalenza è uguale a una di queste. *(Abbiamo già visto la settimana precedente che $\sim$ è effettivamente una relazione d'equivalenza.)*

Soluzione. Abbiamo che
$$\big[(0, 0)\big] = \big\{(0, 0)\big\},$$
che
$$\big[(0, 1)\big] = \big\{(0, s) \text{ tali che } 0 \neq s \in \mathbb{R}\big\}$$
e che
$$\big[(1, c)\big] = \big\{(s, sc) \text{ tali che } 0 \neq s \in \mathbb{R}\big\}$$
per ogni $c \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia p un primo, e siano a e b due interi. Mostrare che se $p|ab$ allora $p|a$ o $p|b$.

Esercizio 4. Sia n un intero con la seguente proprietà: per ogni due interi a e b, se $n|ab$ allora $n|a$ o $n|b$. Mostrare che n è uguale a 0, a 1, a -1 oppure è un primo.

Martedì 9 novembre

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni di
$$14x \equiv 3 \pmod{20}.$$

Soluzione. Non ci sono soluzioni.

Esercizio 2. Calcolare le soluzioni di
$$45x \equiv 0 \pmod{12}.$$

Soluzione. Le soluzioni sono tutte e sole del tipo $4k$ per qualche intero k.

Esercizio 3. Calcolare le soluzioni di
$$45x \equiv 6 \pmod{12}.$$

Soluzione. Le soluzioni sono tutte e sole del tipo $-2 + 4k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

---

[*] Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.
[†] Versione di venerdì 12 novembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.

Mercoledì 10 novembre

Esercizio 1. Calcolare le soluzioni di
$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod 2 \\ x \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}.$$

Soluzione. Le soluzioni sono tutte e sole del tipo $1 + 6k$ per qualche intero k.

Esercizio 2. Calcolare le soluzioni di
$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 1 \pmod 5 \end{cases}.$$

Soluzione. Le soluzioni sono tutte e sole del tipo $-29 + 40k$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Giovedì 11 novembre

Esercizio 1. Scrivere i nella forma $a + b \cdot i$ dove a e b sono numeri reali. *(Qui i è l'unità immaginaria.)*

Soluzione. Vale
$$i = 0 + 1 \cdot i$$
cioè
$$a = 0 \text{ e } b = 1.$$

Esercizio 2. Scrivere
$$\frac{(3+i)\cdot 2i}{1+i} - 3i - 1$$
nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluzione. Otteniamo $1 + i$.

Esercizio 3. Calcolare (nella forma $a + bi$ con $a, b \in \mathbb{R}$) i numeri complessi z tali che $z^2 = -4$.

Soluzione. I numeri complessi che soddisfano l'equazione $z^2 = -4$ sono $2i$ e $-2i$.