Algebra e Geometria per Informatica
Quarto Appello
13 luglio 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. (a) Controllare che $2^n > n!$ se $n = 1, 2, 3$;
   (b) Dimostrare che $2^n < n!$ per ogni intero $n \geq 4$.

2. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

3. Data la retta
$$r \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$
ed il piano α di equazione $2x - y + 3z = 0$, scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per il punto di coordinate $(1, 0, 1)$, ortogonale ad r e parallela ad α.

4. (a) Siano $v_1, v_2, \ldots, v_m$ vettori dello spazio vettoriale V sui reali. Si completi la definizione: $v_1, v_2, \ldots, v_m$ sono una base di V se ...
   (b) Si dimostri che se $v_1, v_2, \ldots, v_m$ è una base di V, per ogni $c \in \mathbb{R}$ la lista $v_1 + cv_2, v_2, \ldots, v_m$ è ancora una base di V.

5. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 0 & t-2 & -t \\ t & t & 1-t \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale t. Calcolare il rango di M quando $t = 2$. Dire per quali valori di t la matrice M è invertibile. Calcolare l'inversa di M per $t = 1$.

6. Indichiamo con U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dire se v_1 e v_2 sono ortogonali. Calcolare una base ortogonale di U. Calcolare una base per il complemento ortogonale $U^\perp$ di U.

7. Consideriamo la congruenza

$$64x \equiv 8 \pmod{84}.$$

Dire se $x = 1$ è soluzione della congruenza. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza. Elencare tutte le soluzioni comprese tra 0 e 83. Elencare le soluzioni dell'equazione

$$[64]x \equiv [8] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{84}.$$

8. Consideriamo la funzione a valori complessi

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto iz^2 + (2+i)z.$$

Scrivere gli elementi dell'insieme

$$f^{-1}(i-1) = \big\{ z \in \mathbb{C} \text{ tali che } f(z) = i-1 \big\}$$

nella forma $a + ib$ con a e b in $\mathbb{R}$. Dire se la funzione f è iniettiva e se è suriettiva.