

ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - QUINTA SETTIMANA ^{*†}

ANDREA PAVAN

MERCOLEDÌ 17 NOVEMBRE

Esercizio 1. Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dove a, b, c e d sono parametri. (Usando lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima riga.)

SOLUZIONE. Il determinante è $ad - bc$.

Esercizio 2. Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Applicando la formula trovata nell'esercizio precedente.)

SOLUZIONE. Il determinante è 1.

Esercizio 3. Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

dove a, b, c, d, e, f, g, h e i sono parametri. (Anche qui usando lo sviluppo di Laplace.)

SOLUZIONE. Il determinante è $aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$. (C'è un metodo semplice per ricordare questa formula. Vedi il capitolo 2 di W. K. Nicholson, Algebra lineare, a pagina 106.)

Esercizio 4. Calcolare il determinante di

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(Usando il secondo metodo visto assieme: (i) trasformare la matrice in una matrice a scala utilizzando operazioni elementari, (ii) calcolare il determinante di quest'ultima moltiplicando le componenti della diagonale principale, e (iii) calcolare il determinante della matrice di partenza in funzione del determinante della matrice a scala e delle trasformazioni elementari utilizzate.)

SOLUZIONE. Il determinante è 4.

* Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.

† Versione di venerdì 19 novembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo <http://www.math.unipd.it/~pan>.

GIOVEDÌ 18 NOVEMBRE

Esercizio 1. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

dove a, b, c e d sono parametri. Calcolare l'aggiunta $\text{adj}A$ di A . Supponendo che A sia invertibile, calcolare l'inversa di A . (Utilizzando la formula che descrive A^{-1} in funzione di $\text{adj}A$ e del determinante di A .)

SOLUZIONE. Vale

$$\text{adj}A = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

e

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare l'aggiunta e l'inversa di

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

SOLUZIONE. L'aggiunta e l'inversa sono entrambe uguali a

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Indichiamo con

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

l'unico vettore-colonna che è soluzione del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare s_2 . (Usando la regola di Cramer. Il vettore s è ben definito perché la matrice dei coefficienti è invertibile; vedi l'esercizio precedente.)

SOLUZIONE. Vale $s_2 = 3$.