

Algebra e Geometria per Informatica
Quinto Appello
16 settembre 2011

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Si dimostri per induzione che per ogni intero positivo n

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & na \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per ogni $a \in \mathbb{R}$.

2. Consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dire se il vettore

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

è un autovettore di A . Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A . Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

3. Consideriamo la congruenza

$$42x \equiv 6 \pmod{62}.$$

Dire se $x = 1$ è soluzione della congruenza. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza. Elencare tutte le soluzioni comprese tra 0 e 61. Dire quante sono ed elencare le soluzioni dell'equazione

$$[42]x \equiv [6] \quad \text{in } \mathbb{Z}_{62}.$$

4. Consideriamo la funzione a valori complessi

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \quad z \mapsto z^2 + i.$$

Scrivere gli elementi dell'insieme

$$f^{-1}\left(-\frac{1+3i}{i}\right) = \left\{z \in \mathbb{C} \text{ tali che } f(z) = -\frac{1+3i}{i}\right\}$$

nella forma $a + ib$, con a e b in $\mathbb{R}$. Dire se la funzione f è iniettiva e se è suriettiva.

5. Consideriamo la matrice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -t & -t & t-1 \\ 0 & t-1 & 0 \end{bmatrix}$$

dipendente dal parametro reale t . Calcolare il rango di M quando $t = 1$. Dire per quali valori di t la matrice M è invertibile. Calcolare l'inversa di M per $t = 0$.

6. Si descriva, dimostrandone la correttezza, un algoritmo che, dati i vettori linearmente indipendenti $v_1, \dots, v_k$ di $\mathbb{R}^n$, produca una base di $\mathbb{R}^n$ contenente $v_1, \dots, v_k$.

7. Siano date le rette r ed s :

$$r = \begin{cases} x &= t-2 \\ y &= t \\ z &= 2t+1 \end{cases}, \quad s = \begin{cases} x+y-z &= 0 \\ x+2y+1 &= 0 \end{cases}$$

(a) Si scrivano equazioni dei piani α per $P(-2, 0, 1)$ ortogonale ad r e β per $P(-2, 0, 1)$ ortogonale ad s .

(b) La retta q intersezione di α e β è ortogonale ad r e ad s ?

8. Indichiamo con U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Dire se $U = \mathbb{R}^4$. Calcolare una base ortogonale di U .