ESERCIZI SVOLTI A LEZIONE - SECONDA SETTIMANA [*,†]

ANDREA PAVAN

Lunedì 25 ottobre

Esercizio 1. Calcolare il rango della matrice associata a

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Infine, calcolare le soluzioni base del sistema lineare. *(Le soluzioni base sono quelle che attribuiscono a un'incognita non dominante il valore* 1 *e a tutte le altre incognite non dominanti il valore* 0*.)*

Soluzione. Il rango è due, e le soluzioni base sono

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Dimostrare che

$$\begin{cases} x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \end{cases}.$$

non ammette soluzioni. *(Usare il fatto che un sistema lineare ammette soluzioni se e solo se la sua matrice completa e la sua matrice dei coefficienti hanno lo stesso rango.)*

Esercizio 3. Indichiamo con S il sistema lineare

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + x_2 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}.$$

Calcolare una soluzione particolare di S e le soluzioni base del sistema lineare omogeneo associato. Infine, descrivere le soluzioni di S.

Soluzione. Una soluzione particolare di S è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

e l'unica soluzione-base del sistema lineare omogeneo è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[*] Corso di Algebra e geometria, Laurea in Informatica, Università degli Studi di Padova, a.a. 2010-2011.
[†] Versione di martedì 2 novembre 2010. Disponibile (nella versione più aggiornata) per tutta la durata del corso (e un po' oltre) all'indirizzo `http://www.math.unipd.it/~pan`.

Le soluzioni di S sono tutte e sole del tipo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per qualche scelta del parametro s. *(Si ottiene in modo semplice una soluzione particolare attribuendo a tutte le incognite non dominanti il valore* 0*.)*

Esercizio 4. Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calcolare AB e BA. *(La prima è una matrice* 3×3*, la seconda una matrice* 2×2*; in particolare* $AB \neq BA$*.)*

Soluzione. Risulta che

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 5. Descrivere le matrici quadrate di ordine due che commutano con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Sono tutte e sole le matrici del tipo

$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

per qualche scelta dei parametri s e t.

Esercizio 6. Siano A e B due matrici quadrate, della stessa dimensione e *diagonali*. Mostrare che:

(i) $A + B$ è diagonale, e le sue componenti sulla diagonale principale sono la somma delle corrispondenti componenti di A e B,

(ii) AB è diagonale, e le sue componenti sulla diagonale principale sono il prodotto delle corrispondenti componenti di A e B.

(Da (ii) *segue che* $AB = BA$*.)*

Martedì 26 ottobre

Esercizio 1. Indichiamo con A e B due matrici quadrate della stessa dimensione. Mostrare che $AB = BA$ se e solo se

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B).$$

(Confronta con l'esempio 1.4.8 di W.K. Nicholson, Algebra lineare*, McGraw-Hill (pagine 42-43). L'ultima uguaglianza è la formula di un prodotto notevole.)*

Esercizio 2. Mostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e calcolarne l'inversa.

Soluzione. L'inversa è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Mostrare che

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

non è invertibile.

Giovedì 28 ottobre

Esercizio 1. Descrivere i valori del parametro s per i quali

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & s \end{pmatrix}$$

è invertibile; per tali valori, calcolare l'inversa.

Soluzione. La matrice è invertibile se e solo se $s \neq 0$; in questo caso, l'inversa è

$$\frac{1}{s}\begin{pmatrix} 2s & s & 0 \\ s-2 & s-1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Mostrare che

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto 2x$$

è iniettiva e suriettiva. *(Con meno simboli: f è la funzione dall'insieme dei numeri reali all'insieme dei numeri reali che ad ogni numero reale x associa il numero reale $2x$.)*

Esercizio 3. Mostrare che

$$f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad x \mapsto 2x$$

è iniettiva e *non* è suriettiva. *(Qui $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali,* compreso *lo zero.)*

Esercizio 4. Mostrare che

$$f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \quad x \mapsto |x|$$

è suriettiva e non è iniettiva. *($\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi, e $|x|$ il valore assoluto di x.)*

Esercizio 5. Mostrare che

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto x^2$$

non è inettiva e non è suriettiva.