Algebra e Geometria per Informatica
Secondo Appello
12 gennaio 2011
Tema A

Nome e Cognome:

Matricola:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

Risolvere ciascun esercizio su una pagina nuova

1. Consideriamo la funzione
$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad z \mapsto z^3 + 1.$$
Dire, motivando la risposta, se f è iniettiva e se è suriettiva. Inoltre, dire quanti sono e scrivere nella forma $a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, gli elementi dell'insieme
$$f^{-1}(2) = \big\{z \in \mathbb{C} \text{ tale che } f(z) = 2\big\}.$$

2. Mostrare, utilizzando il principio di induzione, che
$$2^n \geq n + 1$$
per ogni numero naturale $n \geq 0$. *(Nota: ricordare che $2^0 = 1$.)*

3. Descrivere tutte le soluzioni intere della congruenza
$$26x \equiv -4 \pmod{44}.$$
Inoltre, dire quante sono ed elencare le soluzioni dell'equazione
$$[26][x] = [-4] \text{ in } \mathbb{Z}_{44}.$$

4. Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dire, motivando la risposta, se il vettore

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un autovettore di A. Calcolare il polinomio caratteristico e gli autovalori di A. Per ogni autovalore, determinare una base del suo autospazio. Inoltre, mostrare che A è diagonalizzabile, e trovare una matrice invertibile P e una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Sia U il sottospazio di $\mathbb{R}^4$ generato dai vettori

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \ Y_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \ Y_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

   (a) Calcolare la dimensione di U.

   (b) Trovare una base ortogonale di U.

6. (a) Dire per quali valori di t la matrice $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t+1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ è invertibile.

   (b) Calcolare P^{-1} per $t = 0$.

7. Date le rette

$$r \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1 \\ z = -t + 1 \end{cases} \qquad s \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - 4y + z = 0 \end{cases}$$

   (a) dire se r ed s sono ortogonali;

   (b) scrivere un'equazione del piano π contenente s e parallelo ad r.

8. (a) Siano $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vettori dello spazio vettoriale V, e sia $T : V \to W$ una funzione lineare. Si dimostri che se $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_k)$ sono linearmente indipendenti, allora anche $v_1, v_2, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.

   (b) Consideriamo la funzione lineare $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $T(X) = AX$, dove $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Si trovino due vettori linearmente indipendenti $X_1, X_2 \in \mathbb{R}^3$ tali che $T(X_1), T(X_2)$ siano linearmente dipendenti.