Algebra e Geometria per Informatica
Seconda Prova Parziale
4 dicembre 2009
Tema A

NOME E COGNOME:

MATRICOLA:

Si raccomanda di non scrivere nella tabella sottostante.

Es 1	Es 2	Es 3	Es 4	Es 5	Es 6	Es 7	Es 8	Tot

RISOLVERE CIASCUN ESERCIZIO SU UNA PAGINA NUOVA

1. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 4 & 2 \\ 6 & 12 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 7 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinare una base per $\text{row}(A)$, una base per $\text{col}(A)$ ed una base per $\text{null}(A)$.

2. Sia dato il sottoinsieme di $\mathbb{R}^5$

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x - 2y - z \\ -x + z \\ 3y - z \\ x + y - 2z \\ 2x - 6y \end{bmatrix}, x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Dimostrare che U è un sottospazio di $\mathbb{R}^5$. Determinare una base per il complemento ortogonale $U^\perp$ di U .

3. Sia data l'applicazione

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_2 + x_3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ 6x_1 - x_2 + 5x_3 \end{bmatrix}$$

Dimostrare che T è un'applicazione lineare.

4. Sia data la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Dire se A è diagonalizzabile su $\mathbb{R}$. In caso affermativo, determinare una matrice invertibile P ed una matrice diagonale D tali che $P^{-1}AP = D$.

5. Si completi la seguente definizione: "I vettori $X_1, \dots, X_k$ di $\mathbb{R}^n$ sono linearmente indipendenti se...".

Dire inoltre se i vettori $X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ di $\mathbb{R}^2$ sono linearmente indipendenti motivando la risposta.

6. Sia data la retta r di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + 4y - z = 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni parametriche di r . Dire se il punto P di coordinate $(3, 1, 0)$ appartiene alla retta r . Scrivere un'equazione cartesiana del piano π per P ortogonale ad r .

7. Sia dato il sottospazio U di $\mathbb{R}^4$

$$U = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Determinare una base ortonormale di U e la dimensione di U . Dire se il

vettore $X = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ appartiene ad U .

8. Siano $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$. È vero che $\langle X, Y \rangle = \langle X, Y - cX \rangle$? (dimostrazione o controesempio!)